"十四五"职业教育国家规划教材配套用书

(第2版)

新编高等数学学习参考

主编　尹　光

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

"十四五"职业教育国家规划教材配套用书
新编高等数学学习参考
(第2版)
主编　尹　光
北京邮电大学出版社

X-A

(第2版)
新编高等数学学习参考

XINBIAN GAODENG SHUXUE XUEXI CANKAO

策划编辑：金颖杰
责任编辑：高　宇
封面设计：刘文东

ISBN 978-7-5635-6969-4

定价：29.90元

内 容 简 介

本书是“十四五”职业教育国家规划教材《新编高等数学》(第 2 版)的配套用书,全书共分为 10 章,包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元微积分、常微分方程、无穷级数、线性代数. 每章包含 3 个部分,分别为基本要求、内容提要、习题解答.

本书可作为高等职业院校高等数学课程的配套用书,也可供相关人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

新编高等数学学习参考 / 尹光主编. -- 2 版. -- 北京：北京邮电大学出版社，2023.8（2024.8 重印）
ISBN 978-7-5635-6969-4

Ⅰ.①新… Ⅱ.①尹… Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ.①O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 143821 号

策划编辑：金颖杰　　**责任编辑**：高　宇　　**封面设计**：刘文东

出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：三河市骏杰印刷有限公司
开　　本：787 mm×1 092 mm　1/16
印　　张：11
字　　数：268 千字
版　　次：2023 年 8 月第 2 版
印　　次：2024 年 8 月第 2 次印刷

ISBN 978-7-5635-6969-4　　定　价：29.90 元

前　言

高等数学是高等职业教育重要的基础课程，高等数学的思想和方法越来越多地应用于各个学科和领域. 党的二十大报告指出，“加强基础学科、新兴学科、交叉学科建设，加快建设中国特色、世界一流的大学和优势学科”. 高等数学作为高等教育各专业的公共基础课程，如何快速掌握其基本内涵和其所蕴含的思想、方法是相关教育部门和各个教学单位应认真思考、仔细研究、积极应对的问题.

本书根据现阶段我国职业教育教学改革的需要，在充分总结一线教师教学经验的基础上编写而成，旨在满足学校教师的教学和学生的学习需要. 本书是《新编高等数学》(第 2 版)的配套辅导用书. 全书按照教材的章节安排，每章包含以下三部分内容.

(1)基本要求. 本部分列出了每章的学习要求，使学生能够清楚地了解本章的学习目标，便于学生对知识点进行把握，分清主次.

(2)内容提要. 本部分对《新编高等数学》(第 2 版)中对应章节的主要内容从基本概念、重要结论、方法与技巧等方面进行归纳总结，便于学生查找复习.

(3)习题解答. 本部分对《新编高等数学》(第 2 版)中每节的习题和每章的复习题做了详细的分析和解答，旨在帮助学生掌握解题方法和解题技巧，使学生能够举一反三、触类旁通.

本书由尹光任主编,由陈金涛、刘云川、高宁任副主编,宋武、谢文、张学云、黄涛、陈宇、白余、毛鑫、邹泳参与了编写.

由于编者水平有限,书中难免存在疏漏和不足之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

目　　录

第 1 章　函　　数

1.1　基本要求

(1)掌握函数的概念,知道反函数的定义.

(2)理解函数的性质,包括有界性、单调性、奇偶性和周期性.

(3)熟知基本初等函数,理解复合函数和初等函数.

(4)能用函数解决实际问题.

1.2　内容提要

1.2.1　函数及其性质

1. 函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

定义 1.1　设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集. 若对于每个 $x\in D$,变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的函数,记为

$$y=f(x),x\in D$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量,数集 D 称为这个函数的定义域.

对于每个 $x\in D$,按照对应法则 f,总有确定的值 y 与之对应,则称这个值为函数在点 x 处的函数值,记为 $f(x)$. 因变量与自变量的这种依赖关系通常称为函数关系.

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$的全体构成的集合称为函数 f 的值域,记为 M,即

$$M=\{y|y=f(x),x\in D\}$$

函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素.

函数的常用表示法有以下三种.

(1)**列表法**. 将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法,称为列表法.

(2)**图像法**. 在坐标系中用图像来表示函数关系的方法,称为图像法.

(3)**公式法(解析法)**. 将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(解析表达式)来表示的方法,称为公式法(解析法).

2. 反函数

定义 1.2 设函数 $y=f(x)$,其定义域为 D,值域为 M,如果对于任意 $y\in M$,由函数关系式 $y=f(x)$恰好唯一确定一个 $x\in D$ 与之对应,那么认为 x 是 y 的函数,记作 $x=g(y)$,我们称上述的 $y=f(x)$与 $x=g(y)$互为**反函数**,习惯上将 $x=g(y)$记作

$$x=f^{-1}(y)$$

习惯上常用 x 表示自变量,y 表示因变量,故常把 $y=f(x)$的反函数写作

$$y=f^{-1}(x)$$

由反函数的定义可知,在定义区间上单调的函数必有反函数.

定理 1.1 设函数 $f(x)$的定义域为 D,值域为 M. 若 $f(x)$在 D 上是单调增加或单调减少的,则在 M 上 $f(x)$的反函数 $f^{-1}(x)$存在,且 $f^{-1}(x)$在 M 上也是单调增加或单调减少的.

对于分段函数求其反函数,只需分别求出与各自定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

3. 函数的性质

设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义〔区间 I 为函数 $f(x)$的整个定义域或其定义域的一部分〕,则函数一般具有下列几种特性.

1)有界性

如果存在正数 M,使对任意的 $x\in I$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上有界,否则称 $y=f(x)$在区间 I 上无界.

2)单调性

若对任意的 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$〔或 $f(x_1)>f(x_2)$〕,则称函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调增加(或单调减少). 区间 I 称为单调增区间(或单调减区间);单调增加函数和单调减少函数统称为单调函数;单调增区间和单调减区间统称为单调区间.

3)奇偶性

设函数 $f(x)$的定义区间 I 关于原点对称,若对于任意的 $x\in I$,都有 $f(-x)=f(x)$,则称函数 $f(x)$是区间 I 上的偶函数;若对于任意的 $x\in I$,都有 $f(-x)=-f(x)$,则称函数 $f(x)$是区间 I 上的奇函数;若函数既不是奇函数也不是偶函数,则称为非奇非偶函数.

4)周期性

如果存在不为零的正实数 T,使得对于任意的 $x\in I$,$x+T\in I$,都有 $f(x+T)=f(x)$,则称函数 $y=f(x)$为周期函数,T 是 $y=f(x)$的一个周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

1.2.2 初等函数

1. 基本初等函数

(1)常量函数. $y=C$(C 为常数),该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,图像为过点$(0,C)$且平行于 x 轴的直线.

(2)幂函数. $y=x^a$(a 为实数),该函数的定义域因 a 的取值不同而不同,但无论 a 为何值,它在区间$(0,+\infty)$内总有定义,且图像过点$(1,1)$.

(3)指数函数. $y=a^x(a>0$,且 $a\neq1$,a 为常数),该函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少,图像过点$(0,1)$.

(4)对数函数. $y=\log_a x(a>0$,且 $a\neq1$,a 为常数),该函数的定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时,函数单调增加;当 $0<a<1$ 时,函数单调减少,图像过点$(1,0)$. 在科学记数法中常用到以 e 为底的对数函数,称为自然对数,记作 $y=\ln x$.

(5)三角函数. $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x$,$y=\cot x$,$y=\sec x$,$y=\csc x$ 统称为三角函数.

(6)反三角函数. $y=\arcsin x$,$y=\arccos x$,$y=\arctan x$,$y=\operatorname{arccot} x$ 统称为反三角函数.

2. 复合函数和初等函数

定义 1.3　设 $y=f(u)$,其中 $u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$的值域包含在函数 $y=f(u)$的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$为由 $y=f(u)$与 $u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,其中 u 叫作中间变量.

关于复合函数有如下几点说明.

(1)复合函数的定义可以推广到多个中间变量的情形.

(2)将一个较复杂的函数分解为若干个简单函数时,一定要分清层次,由外到内逐层分解.

(3)并不是任意两个函数都能构成复合函数.

1.3　习 题 解 答

习题 1.1

1. 判断下列结论是否正确(请在括号中打"√"或"×").

(1)若两个函数的定义域与值域相同,则这两个函数是相同的函数.　　(　　)

(2)分段函数是由两个或两个以上函数组成的.　　(　　)

(3)偶函数的图像不一定过原点,奇函数的图像一定过原点.　　(　　)

(4)当 $x\in(0,+\infty)$时,函数 $y=|f(x)|$与 $y=f(|x|)$的图像相同.　　(　　)

【解】　(1)×　　(2)√　　(3)×　　(4)×

2. 填空题.

(1)已知定义在 **R** 上的奇函数 $f(x)$满足 $f(x+3)=f(x)$,则 $f(6)=$________.

(2)函数 $f(x)=x^2-5x+4$ 在________内单调递减,在________内单调递增.

(3)$f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\geqslant1\\1-x, x<1\end{cases}$,则 $f[f(-2)]=$________.

【解】　(1)答案:$f(6)=f(3)=f(0)=0$.

解析:$y=f(x)$为 **R** 上的奇函数,且 $f(x+3)=f(x)$,所以 $y=f(x)$的周期 $T=3$,则 $f(6)=f(3)=f(0)=0$.

提示:定义在 **R** 上的奇函数一定过原点.

(2)答案:$\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$,$\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$.

解析:$f(x)=x^2-5x+4$ 的对称轴为 $x=\frac{5}{2}$.所以,其在 $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right)$ 内单调递减,在 $\left(\frac{5}{2},+\infty\right)$ 内单调递增.

(3)答案:$f[f(-2)]=f(3)=10$.

解析:首先计算 $f(-2)$,因为 $-2<1$,所以应该代入 $f(1-x)$ 中,得到 $f(3)$;而 $3>1$,所以将3代入 $f(x)=x^2+1$ 中,得到结果10.

3.求下列函数的定义域.

(1)$y=\sqrt{2x-3}+\frac{1}{x-3}$;　　(2)$f(x)=\sqrt{1-2^x}+\frac{1}{\sqrt{x+3}}$.

【解】 (1)答案:定义域为 $\left\{x \mid x\geqslant\frac{3}{2}\text{且 }x\neq 3\right\}$.

解析:求原函数的定义域需要满足两个条件:一是 $2x-3\geqslant 0$;二是 $x-3\neq 0$.由此即得 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 且 $x\neq 3$.

(2)答案:定义域为 $\{x \mid -3<x\leqslant 0\}$.

解析:求原函数的定义域需要满足两个条件:一是 $1-2^x\geqslant 0$;二是 $x+3>0$.由此即得 $-3<x\leqslant 0$.

4.做出下列函数的图像.

(1)$y=|x-2|\cdot(x+1)$;　　(2)$y=\begin{cases}x+1, & x\geqslant 3\\ x^2-5, & x<3\end{cases}$.

【解】 (1)提示:可先将原函数进行转化,转化为如下分段函数的形式.

$$y=|x-2|\cdot(x+1)=\begin{cases}(x-2)(x+1), & x\geqslant 2\\ (2-x)(x+1), & x<2\end{cases}$$

再根据分段函数取样点,画出函数图像.图像略.

(2)画图原理同(1).图像略.

5.珍惜不可再生资源、节能环保是我们每个人都应该奉行的生活理念.现在很多城市采用了阶梯式收水费的政策.例如,某城市规定四口及四口以下的居民之家每月每户基准用水量核定为26 t,每吨按1.98元计收,超出部分的用水将分别按照基准水价的1.5倍(1~8 t)、2倍(8 t以上)进行阶梯收费.请你列出上述函数关系式,读取你家当月水表数据,按此收费标准计算出该月水费,并思考可以从哪些方面减少用水量.

【解】 函数关系式为:$f(x)=\begin{cases}1.98x, & 0<x\leqslant 26\\ 1.98\times 26+2.97(x-26), & 26<x\leqslant 34\\ 1.98\times 26+3.96(x-26), & x>34\end{cases}$.其他略.

习题 1.2

1.指出下列函数由哪些简单函数复合而成.

(1)$y=\sin(x^2+1)$;　　(2)$y=\ln[\sin(x+5)]$;

(3) $y=e^{\cos 2x}$；　　(4) $y=\arctan(\ln x)$.

【解】 (1) $y=\sin(x^2+1)$ 可看作由 $y=\sin u$ 和 $u=x^2+1$ 复合而成.

(2) $y=\ln[\sin(x+5)]$ 可看作由 $y=\ln u$，$u=\sin v$，$v=x+5$ 复合而成.

(3) $y=e^{\cos 2x}$ 可看作由 $y=e^u$ 和 $u=\cos 2x$ 复合而成.

(4) $y=\arctan(\ln x)$ 可看作由 $y=\arctan u$ 和 $u=\ln x$ 复合而成.

2. 设 $f(x)=3^x$，$g(x)=\sqrt{x}$，求

(1) $f[g(x)]$；　　(2) $g[f(x)]$.

【解】 (1) $f[g(x)]=3^{g(x)}=3^{\sqrt{x}}$.

(2) $g[f(x)]=\sqrt{f(x)}=\sqrt{3^x}$.

3. 选择题.

(1) $\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的值为(　　).

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$

C. $\dfrac{\pi}{4}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

(2) $y=\arcsin 2x$ 的反函数为(　　).

A. $y=2\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$　　B. $y=\dfrac{\sin x}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $y=\sin 2x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$　　D. $y=\sin\dfrac{x}{2}\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$

【解】 (1)C　　(2)B

复 习 题 一

1. 选择题.

(1) 函数 $f(x)=\sqrt{2^x-1}+\dfrac{1}{x-2}$ 的定义域为(　　).

A. $[0,2)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(0,2)\cup(2,+\infty)$　　D. $[0,2)\cup(2,+\infty)$

(2) 函数 $y=(2m-1)x+b$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数，则(　　).

A. $m>\dfrac{1}{2}$　　B. $m<\dfrac{1}{2}$

C. $m>-\dfrac{1}{2}$　　D. $m<-\dfrac{1}{2}$

(3) 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}+x^2$，则 $f(-1)$ 等于(　　).

A. -2　　B. 0

C. 1　　D. 2

【解】 (1)D (2)B (3)A

2. 填空题.

(1)函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$的定义域是________.

(2)已知 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$,则 $f(x)=$________.

(3)函数 $f(x)=4-2\cos\frac{1}{3}x$ 的最小值是________;$f(x)$取得最小值时,x 的值为________.

(4)若 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\geqslant 0\\ 2^x, & x<0\end{cases}$,则 $f(3)=$________.

【解】 (1)答案:定义域为$[-3,1]$.

解析:原题可转化为解一元二次不等式 $3-2x-x^2\geqslant 0$,解得$-3\leqslant x\leqslant 1$,即定义域为$[-3,1]$.

(2)答案:$f(x)=x^2-1$.

解析:令$\sqrt{x}+1=t$,则$\sqrt{x}=t-1\Rightarrow x=(t-1)^2$,故由 $f(\sqrt{x}+1)=x+2\sqrt{x}$ 得

$$f(t)=(t-1)^2+2(t-1)=t^2-1$$

即 $f(x)=x^2-1$.

(3)答案:$2,6k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

解析:由 $f(x)=4-2\cos\frac{1}{3}x$ 的图像可知,当 $\cos\frac{1}{3}x=1$ 时,$f(x)$取得最小值 2,而此时 x 的取值为 $6\pi,12\pi,18\pi,\cdots$,即 $6k\pi$,其中 $k\in\mathbf{Z}$.

(4)答案:-2.

解析:因为 $3>0$,所以将 $x=3$ 代入式 $f(x)=1-x$ 中,得到 $f(3)=-2$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}2^x, & -1<x<0\\ 2, & 0\leqslant x<1\\ x-1, & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$,求 $f(2),f\left(\frac{1}{2}\right),f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

【解】 答案:$f(2)=1,f\left(\frac{1}{2}\right)=2,f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解析:由于 $2\in[1,3]$,所以 $f(2)=2-1=1$;由于$\frac{1}{2}\in[0,1)$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$;由于$-\frac{1}{2}\in(-1,0)$,所以 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 下列函数 $f(x)$与 $g(x)$是否相同?

(1)$f(x)=\frac{x-1}{x^2-1},g(x)=\frac{1}{x+1}$;

(2)$f(x)=\sqrt{(1-x)^2},g(x)=1-x$;

(3)$f(x)=x,g(x)=\ln e^x$.

【解】 答案:(1)不同;(2)不同;(3)相同.

解析：两个函数是相同的，需要满足两个条件：一是函数的定义域相同；二是在函数定义域相同的情况下，相同的自变量得到的函数值相同.

首先看第(1)题，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\}$，而函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)\}$，故函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$ 不同.

其次看第(2)题，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,+\infty)\}$，函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,+\infty)\}$，两个函数的定义域相同. 接下来判断当 x 取同一值时所得到的函数值是否相同. 取 $x=2$ 代入函数 $f(x)$ 和函数 $g(x)$，得到 $f(x)=1$，$g(x)=-1$，可知对于同一自变量 x 值，得到的两个函数值不相同，故这两个函数不同.

最后看第(3)题，函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,+\infty)\}$，函数 $g(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in(-\infty,+\infty)\}$，两个函数的定义域相同. 而对于任意取值 x，均有 $f(x)=g(x)$，故这两个函数相同.

5. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}+\sqrt{x+2}$；　　(2) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$.

【解】 答案：(1) $[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$；(2) $(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

解析：首先看第(1)题，要想使函数有意义，则 x 必须满足如下不等式组.

$$\begin{cases}1-x^2\neq 0\\ x+2\geqslant 0\end{cases}$$

解上述不等式组，可得 $x\in[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$.

其次看第(2)题，要想使函数有意义，则 x 必须满足如下不等式组.

$$\begin{cases}x^2-1>0\\ -1\leqslant\dfrac{1}{x+1}\leqslant 1\end{cases}$$

解上述不等式组，可得 $x\in(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

6. 对于下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$，求复合函数 $f[g(x)]$ 和 $g[f(x)]$，并确定它们的定义域.

(1) $f(x)=\sqrt{x+1}$，$g(x)=x^4$；

(2) $f(x)=\sqrt{1-x}$，$g(x)=\sqrt{x-1}$.

【解】 答案：(1) $f[g(x)]=\sqrt{x^4+1}$，$x\in\mathbf{R}$，$g[f(x)]=(x+1)^2$，$x\geqslant -1$.

(2) $f[g(x)]=\sqrt{1-\sqrt{x-1}}$，$1\leqslant x\leqslant 2$，$g[f(x)]=\sqrt{\sqrt{1-x}-1}$，$x\leqslant 0$.

解析：首先看第(1)题，对于复合函数 $f[g(x)]$，将 $g(x)$ 作为函数 $f(x)$ 的自变量，因此将 $g(x)=x^4$ 代入函数 $f(x)$ 中，可得 $f[g(x)]=\sqrt{x^4+1}$；接下来判定该复合函数的定义域，因为无论 x 取何值，复合函数都有意义，所以该复合函数的定义域为全体实数，即 $\mathbf{R}$.

对于复合函数 $g[f(x)]$，将函数 $f(x)$ 作为函数 $g(x)$ 的自变量，因此，将 $f(x)=\sqrt{x+1}$ 代入函数 $g(x)$ 中，可得 $g[f(x)]=(x+1)^2$；接下来判定该复合函数的定义域，如果单看复合函数 $g[f(x)]=(x+1)^2$，x 可以取任意值，但是这里要注意，自变量在满足复合函数之前首先要满足 $f(x)$ 的定义域，即 $x+1\geqslant 0$，从而得出复合函数 $g[f(x)]=(x+1)^2$ 的定义域为 x

$\geqslant -1$.

其次看第(2)题,解题过程参考第(1)题,即可得到结果.

7.求下列函数的反函数.

(1)$y=1+\log_4 x$;　　　　(2)$y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 答案:(1)$y=4^{x-1}, x\in\mathbf{R}$;(2)$y=\log_2\dfrac{x}{1-x}, 0<x<1$.

解析:首先看第(1)题,由 $y=1+\log_4 x$ 得

$$4^{y-1}=x$$

所以,函数 $y=1+\log_4 x$ 的反函数为 $y=4^{x-1}$,其定义域为原函数的值域,即 $x\in\mathbf{R}$.

其次看第(2)题,由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$得

$$2^x(1-y)=y$$

从而有 $2^x=\dfrac{y}{1-y}$,得出 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,所以函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$的反函数为 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$,其定义域为原函数的值域,即 $0<x<1$.

8.已知 $f(x-1)=x^2+x+1$,求 $f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$.

【解】 由 $f(x-1)=x^2+x+1=(x-1)^2+3(x-1)+3$ 得

$$f(x)=x^2+3x+3$$

因此可得 $f\left(\dfrac{1}{x-1}\right)=\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2+\dfrac{3}{x-1}+3$.

9.设 $f(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$,对于任意 x,y 都有

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$$

且 $x\neq0$ 时 $f(x)\neq0$. 证明 $f(x)$为偶函数.

【证明】 因为对于任意 $x,y\in\mathbf{R}$,都有

$$f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$$

令 $x=y=0$,得 $f(0)=2$ 或 $f(0)=0$.

当 $f(0)=0$ 时,对于任意的 $x\neq0$,都有 $f(x+0)+f(x-0)=f(x)\cdot f(0)=0$ 与 $f(x)\neq0$ 矛盾. 所以,$f(0)=0$ 舍去.

所以,$f(0)=2$,$f(0+y)+f(0-y)=f(0)\cdot f(y)$,从而得 $f(-y)=f(y)$,即函数 $f(x)$为偶函数.

10.某单位有汽车一辆,一年中的税款、保险费及司机工资等支出共为 a,另外,行驶单位路程需油费 b,试写出一年中平均每千米费用 y 与行驶路程 x 的函数关系式.

【解】 由题干可知,一年中的税款、保险费及司机工资等费用为固定费用 a,而油费会随着路程的增加而增加,所以油费是个变量,于是可以得出如下的函数关系式.

$$y=bx+a$$

但是要注意,上式求得的是一年汽车行驶的总费用,而我们的目的是写出一年中平均每千米费用与行驶路程的函数关系式,所以得出如下结果.

$$y=\frac{bx+a}{x}$$

即所求的函数关系式.

11. 一物体由静止开始做直线运动，前 10 s 内做匀加速运动，加速度为 2 cm/s^2，10 s 后做匀速运动，运动开始时路程为零，试建立路程 s 与时间 t 之间的函数关系.

【解】 由题干知，该物体的运动可看作两部分：一部分是匀加速运动，另一部分是匀速运动，时间分割点是 10 s. 于是，当 $0\leqslant t\leqslant 10$ 时，可由匀加速直线运动的位移公式（$s=v_0t+\frac{1}{2}at^2$，因为物体的初始速度为 0，且从时间 0 s 开始运动，因此可将位移公式简化为 $s=\frac{1}{2}at^2$）得到下面的关系式.

$$s=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times 2\times t^2=t^2 \tag{1-1}$$

10 s 后（$t>10$）物体开始做匀速直线运动，由匀速直线运动的位移公式得到如下的关系式.

$$s=s_0+v_0t \tag{1-2}$$

式(1-2)中的 s_0 实际上是物体在前 10 s 内做匀加速直线运动所产生的位移，即由式(1-1)可得 $s_0=10^2=100$，即在到达时刻 10 s 时，物体已经走了 100 cm. 而对于 10 s 时刻的初始速度，应该按照匀加速直线运动的速度公式计算得出.

$$v=v_0+at=0+2\times 10=20$$

即物体在 10 s 时开始做匀速直线运动的速度为 20 cm/s，所以最终可以得出路程 s 与时间 t 之间的函数关系式为

$$s=\begin{cases}t^2, & 0\leqslant t\leqslant 10\\ 100+20t, & t>10\end{cases}$$