高等职业教育精品教材

高等数学简明教程
高等数学简明教程学习指导与练习
经济数学
经济数学学习指导与练习
高等应用数学
● 高等应用数学学习指导与练习
工程数学

ISBN 978-7-5635-3545-3
定价：35.00元

策划编辑：时虎平
责任编辑：边丽新

高等职业教育精品教材

高等应用数学学习指导与练习

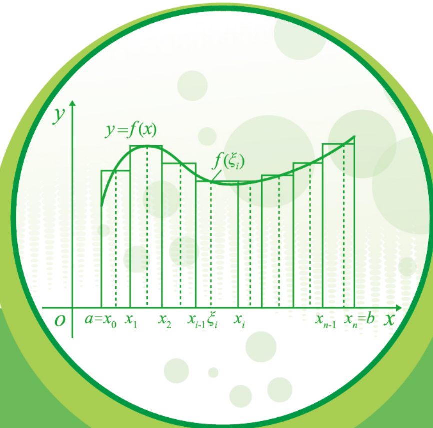
北京邮电大学出版社

X-A

高等职业教育精品教材

高等应用数学学习指导与练习

卢爱红◎主　编



北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

高等职业教育精品教材

高等应用数学
学习指导与练习

主　编　卢爱红
副主编　付　琼　杨　婷

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

内 容 简 介

本书是《高等应用数学》的配套教学用书。本书在编写的过程中，充分考虑了高职高专教育的特点，将内容分为“本章归纳与总结”、“典型例题解析”、“课后习题详解”三个栏目。其中“本章归纳与总结”栏目中列出了本章学习的知识要点以及本章的重点和难点；“典型例题解析”栏目中选编了覆盖前面知识点的相应例题和本章知识的典型例题，选题难度切合学生的实际；“课后习题详解”栏目中给出了教材中课后习题的详细答案或提示，供学生参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等应用数学学习指导与练习/卢爱红主编．-- 北京：北京邮电大学出版社，2013.7(2024.8 重印)
ISBN 978-7-5635-3545-3

Ⅰ.①高… Ⅱ.①卢… Ⅲ.①应用数学—高等职业教育—教学参考资料 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 152404 号

策划编辑：时虎平　　**责任编辑**：边丽新

出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号
邮政编码：100876
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：三河市骏杰印刷有限公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：13.75
字　　数：261 千字
版　　次：2013 年 7 月第 1 版
印　　次：2024 年 8 月第 5 次印刷

ISBN 978-7-5635-3545-3　　定　价：35.00 元

·如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系·

服务电话：400-615-1233

出版说明

高等职业教育以培养生产、建设、管理、服务第一线的高素质技能型专门人才为根本任务,在建设人力资源强国和高等教育强国的伟大进程中发挥着不可替代的作用。

近年来,我国高职高专教育蓬勃发展,积极推进校企合作、工学结合人才培养模式改革,办学水平不断提高,为现代化建设培养了一批高素质技能型专门人才,对高等教育大众化作出了重要贡献。尽管如此,我国高职高专教育的质量、结构、规模还不能很好地适应当前经济社会发展的需要,部分高职高专院校毕业生还不能很好地满足社会工作岗位对相关技术和能力的需求。

要加快高职高专教育改革和发展的步伐、全面提高人才培养质量,就必须对课程体系等问题进行深入探索。教育部在《关于全面提高高等职业教育教学质量的若干意见》中指出,“课程建设与改革是提高教学质量的核心,也是教学改革的重点和难点”,“建立突出职业能力培养的课程标准,规范课程教学的基本要求,提高课程教学质量”,这为高职高专教育课程体系建设指明了方向。在课程体系建设过程中,教材无疑起着至关重要的基础性作用,高质量的教材是培养高素质人才的重要保证。

目前,我国高等职业教育教学改革正在深入进行,高职教材建设取得了显著的成效。但从整体上看,教材建设仍不能很好地适应高职高专教育的发展需要,主要表现在:缺乏科学理论的支持,缺乏行业支持,缺少对生产实际的调查研究和深入了解,缺乏对职业岗位所需的专业知识和专项能力的科学分析,出现体系不明、内容交叉或重复、脱离实际、针对性不强等问题;与专业课程相配套的实践性教材严重不足;同类教材建设缺乏统一标准,相关课程的教材内容自成体系,缺乏沟通衔接;版本偏老或内容陈旧,不能及时将新法规、新知识、新技术、新工艺、新装备、新案例反映到教材中来;与劳动部门颁发的职业资格证书或技能鉴定标准缺乏有效衔接。教材的相对落后成为制约高职高专教育发展的瓶颈之一。

在此背景下,为了更好地贯彻《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》相关精神,更好地推进高职高专教育的发展,我们组织了一批具有丰富理论知识和实践经验的专家、一线教师,成立了编审委员会,着力规划出版一批符合高职高专教育特点和需求的优质教材。

依据教育部制定的《高职高专教育基础课程教学基本要求》和《高职高专教

育专业人才培养目标及规格》，我们调研了数百所具有代表性的高等职业技术学院和高等专科学校，广泛而深入地了解了高职高专教育的专业和课程设置，系统地研究了课程的体系结构；同时充分汲取各院校在探索培养应用型人才方面取得的成功经验，并在教材出版的各个环节设置专业的审定人员进行严格审查，从而确保了整套教材“突出行业需求，突出职业的核心能力”的特色。

本系列教材除了满足内容充实、完整，结构、体例合理，语言得体、流畅等基本要求外，还力求克服以往高职高专教材的缺陷和不足，在以下方面打造自己的优势和特色：

（1）本系列教材的定位更加强调“以就业为导向”。紧密依托行业或企业优势，建立产、学、研密切结合的运行机制，是高职高专教育健康发展的关键。我们通过对生产实际的调查研究和深入了解，对职业岗位（群）所需专业知识和专项能力的科学分析，以科学的课程理论为支持，力求使本系列教材定位与就业市场相结合，充分体现出“以就业为向导，以能力为本位，以学生为中心”的风格，从而更具实用性和前瞻性。

（2）本系列教材打破传统的教材编写模式，力求在编写风格和表达形式方面有所突破，充分体现“项目导向、任务驱动”的教学理念，通过构建具体的工作任务作为学生学习的切入点，这就促使学生能够主动学习，从而达到“教中做、做中学、学中练”的目的，全面提升学生解决问题的实战经验和能力。

（3）本系列教材编写思路清晰，体系结构安排合理，注重知识体系的有序衔接，力避知识的断层和重复。同时，教材也遵循教育部对高职高专教育提出的“以应用为目的，以必需、够用为度”原则，从实际应用的需要出发，减少枯燥、实用性不强的理论灌输。

（4）本系列教材的编写及时跟进社会及行业的最新发展动态，将最新、最权威、最具代表性的成果运用于教材当中，从而避免所讲知识与社会脱节。

为保证教材的总体质量和前瞻性，我们着重加强与示范性高等职业院校的合作，在全国范围遴选了具有丰富教学经验和实践经验、具有较高专业水平的双师型教师参加编写。

为支持“立体化”教学，我们为本系列教材精心策划了精品教学资料包和教学资源网，向教师用户提供教学课件、教学案例、教学参考、教学检测、教学资源推荐、课后习题答案等教学资源，以支持网络化及多媒体等现代化教学方式，有效提升教学质量。

希望各高职院校在使用本系列教材的过程中提出宝贵的意见和建议，我们将认真听取，不断完善。

编审委员会

前　言

本书是《高等应用数学》的配套教学用书。本书是依据教育部《高职高专教育专业人才培养目标及规格》，参考《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》，认真研究总结全国高职高专教学教改的经验，并结合当前高职高专数学课程改革的实际编写的。

在多年的教学实践与研究中，我们认识到高职高专院校的数学基础教育应该着力培养学生以下几个方面的能力：一是运用数学的思想、概念、方法理解和分析实际问题的能力；二是将实际问题转化为数学模型的能力；三是求解数学模型的能力。本书将对学生数学素质的培养有机地融入知识讲解中，突出数学思想的介绍和数学方法的应用。

本书在编写的过程中，充分考虑了高职高专教育的特点，将每章内容分为“本章归纳与总结”“典型例题解析”“课后习题详解”三个栏目。其中“本章归纳与总结”栏目中列出了本章学习的知识要点以及本章的重点和难点；“典型例题解析”栏目中选编了覆盖前面知识点的相应例题和本章知识的典型例题，选题难度切合学生的实际；“课后习题详解”栏目中给出了教材中课后习题的详细答案或提示，供学生参考。此外，本书最后附有两套综合测试题及答案，可供学生进行自我检测。

本书由兰州职业技术学院卢爱红担任主编，付琼、杨婷担任副主编，其中第一章、第四章和第八章由付琼编写，第二章、第三章和第六章由杨婷编写，第五章、第七章和综合测试题由卢爱红编写，全书由卢爱红统稿。

由于编写时间仓促，书中难免存在疏漏之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

目　　录

第一章　函数、极限与连续

本章归纳与总结

一、基本内容

函数与反函数的概念以及函数的有界性、单调性、奇偶性、周期性在中学就已经很熟习了,这里不再赘述.

1. 初等函数

1) 基本初等函数

常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数统称为基本初等函数.

2) 复合函数

设 $y=f(u)$,其中 $u=\varphi(x)$,且函数 $u=\varphi(x)$ 的值域包含在函数 $y=f(u)$ 的定义域内,则称 $y=f[\varphi(x)]$ 为由 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,其中 u 称为中间变量.

3) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算而得到的,并且可以用一个解析式表示的函数,称为初等函数.

2. 分段函数

在定义域的不同范围具有不同的表达式的函数称为分段函数.

分段函数仍旧是一个函数,而不是几个函数,分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

分段函数在分段点处的函数值、左右极限以及连续性等是重点内容,希望同学们注意.

3. 多元函数的定义

设有三个变量 x,y 和 z,如果当变量 x,y 在它们的变化范围 D 中任意取定一对值时,按照一定的对应规则 f,变量 z 都有唯一确定的值与它们对应,则称变量 z 为

变量x,y的二元函数,记作$z=f(x,y)$,其中x和y称为自变量,z称为因变量.自变量x与y的变化范围D称为该函数的定义域,数集$\{z \mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$称为该函数的值域.

围成区域的曲线称为区域的边界,边界上的点称为边界点,包括边界在内的区域称为闭区域,不包括边界在内的区域称为开区域.

如果一个区域D内任意两点之间的距离都不超过某一常数M,则称区域D为有界区域,否则称区域D为无界区域.

圆域$\{(x,y)\mid (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta^2,\delta>0\}$称为平面上点$P_0(x_0,y_0)$的$\delta$邻域,记作$U(P_0,\delta)$.而称不包含点$P_0$的邻域为去心邻域,记作$\mathring{U}(P_0,\delta)$.

4. 数列极限的定义

对于数列$\{u_n\}$,若当n无限增大时,通项u_n无限接近于某个确定的常数a,则常数a称为数列$\{u_n\}$的极限,此时也称数列$\{u_n\}$收敛于a,记作$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$或$u_n\to a(n\to\infty)$.若数列$\{u_n\}$的极限不存在,则称数列$\{u_n\}$发散.

对于数列$\{u_n\}$,若对任何正整数n,都有$u_n\leqslant u_{n+1}$(或$u_n\geqslant u_{n+1}$)成立,则称数列$\{u_n\}$为单调递增数列(或单调递减数列),单调递增数列和单调递减数列统称为单调数列.

对于数列$\{u_n\}$,如果存在正整数M,使得对于任何正整数n,都有$|u_n|\leqslant M$成立,则称数列$\{u_n\}$为有界数列;否则称该数列为无界数列.

定理1(数列收敛判断定理) 单调有界数列必有极限.

5. 函数极限的定义

1)$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限

设函数$y=f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,若当$|x|$无限增大时,相应的函数值$f(x)$无限接近于某一确定的常数A,则A称为函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限,记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to\infty),$$

其中$x\to\infty$表示x的绝对值无限增大.

若只当$x\to+\infty$(或$x\to-\infty$)时,函数趋近于某一确定的常数A,记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to-\infty}f(x)=A).$$

定理2 极限$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

2)$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限

设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义,当自变量x无限趋近于x_0时,函数$f(x)$的值无限趋近于某一确定的常数A,则称A为$x\to x_0$时函数$f(x)$的极限,

记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A(x\to x_0),$$

其中 $x\to x_0$ 表示 x 既可以从大于 x_0 的方向趋近于 x_0，也可以从小于 x_0 的方向趋近于 x_0.

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某左(或右)δ 邻域内有定义，当自变量 x 从 x_0 的左(或右)侧无限趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的值无限趋近于某一确定的常数 A，则称 A 为 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左(或右)极限，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A).$$

定理 3　极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

6. 极限的性质

性质 1(唯一性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则极限值唯一.

性质 2(有界性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则在 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)$ 有界.

性质 3(保号性)　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且 $A>0$(或 $A<0$)，则必存在 x_0 的某一去心邻域，使得在该邻域内，函数 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论　若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，且在 x_0 的某一去心邻域内函数 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，则 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

7. 无穷小与无穷大

1) 无穷小的定义与性质

在自变量的某一变化过程中，以零为极限的变量称为该变化过程的无穷小量，简称无穷小.

性质 1　有限个无穷小的和也是无穷小.

性质 2　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1　常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2　有限个无穷小的乘积也是无穷小.

定理 4　函数 $\lim f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$(其中 $\lim\alpha=0$).

2) 无穷大的定义及无穷大与无穷小的关系

在自变量的某一变化过程中，绝对值无限增大的变量称为该变化过程的无穷大量，简称无穷大.

定理 5　在自变量的同一变化过程中，

(1) 如果函数 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大；

(2) 如果函数 $f(x)$ 是无穷大，则$\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小.

8. 二元函数的极限

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点(x_0,y_0) 的某去心邻域内有定义，点(x,y) 为该去心邻域内异于(x_0,y_0) 的任意一点，若当点(x,y) 以任意方式趋向点(x_0,y_0) 时，对应的函数值 $f(x,y)$ 总趋向于一个确定的常数 A，则称 A 是二元函数 $z=f(x,y)$ 当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时的极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{ 或} \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

9. 函数极限的运算法则

定理 6(极限四则运算法则) 设在自变量 x 的同一变化过程中，极限 $\lim f(x)$ 及 $\lim g(x)$ 都存在，则有

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$；

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}(\lim g(x)\neq 0)$.

法则(1) 和法则(2) 均可推广到有限个函数的情形. 并有如下推论.

推论 1 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$(C 为常数).

推论 2 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$($n$ 为正整数).

10. 两个重要极限

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

该极限的基本特征是：分子分母的极限值均为零，且分母中的变量与分子正弦函数中的变量相同. 因此，该极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1(\square \text{ 代表同一变量}).$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

该极限的基本特征是：底数的极限值为 1，指数的极限是无穷大，且指数与底数中第二项互为倒数. 因此，该极限的一般形式为

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e}(\square \text{ 代表同一变量}) \text{ 或} \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e}(\square \text{ 代表同一变量}).$$

11. 无穷小的比较

设 α 与 β 是自变量的同一变化过程中的两个无穷小，

(1) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=0$，则称 β 是比 α 高阶的无穷小，记为 $\beta=o(\alpha)$；

(2) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则称 β 是比 α 低阶的无穷小；

(3) 如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=c(c\neq 0)$，则称 β 与 α 是同阶无穷小. 特别地，当 $c=1$ 时，称 β 与 α 是等价无穷小，记为为 $\alpha\sim\beta$.

定理7　在自变量的同一变化过程中，α,α',β 和 β' 都是无穷小，且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，如果 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，那么

$$\lim \frac{\beta}{\alpha}=\lim \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

12. 一元函数的连续与间断

理解函数连续与间断的概念. 要注意连续的定义中包括三个条件：① 函数在该点有定义；② 函数在该点有极限；③ 函数在该点的极限值等于在该点的函数值.

上述三个条件有一个不满足即为间断. 间断点分第一类间断点(左右极限都存在. 若相等为可去间断点；若不等则为跳跃间断点) 和第二类间断点(包含无穷间断点和震荡间断点).

求函数间断点的方法：对于初等函数，只要找出无定义点，这样的点必是间断点；然后再通过考察其左、右极限，来判别间断点的类型. 对于分段函数，在每一段上可以利用初等函数连续性的结论来验证，而在分段点处则必须用连续的定义来验证，由于分段点左、右两侧函数的表达式不同，因此要分别考察其左、右极限.

13. 初等函数的连续性

连续函数的和、差、积、商(分母不为零) 均为连续函数；连续函数的反函数、复合函数仍为连续函数；基本初等函数在其定义域内是连续的；初等函数在其定义区间内是连续的.

14. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最值定理；(2) 有界性定理；(3) 介值定理；(4) 零点定理.

定理中闭区间和函数的连续性两个条件缺一不可，否则结论不一定成立. 要注意这些定理的理论意义和实际应用，特别是最值定理和介值定理.

15. 二元函数的连续与间断

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，若

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.若 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内的每一点都连续,则称 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上连续,或称 $z=f(x,y)$ 是区域 D 上的连续函数.

二元函数在一点连续的等价定义为:

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义,如果 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$,则称二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处连续.

16. 求一元函数极限问题的方法总结

(1) 利用极限的定义证明极限.

(2) 利用无穷小与无穷大的互倒关系求极限.

(3) 对有理函数,当 $x\to\infty$ 时,用 x 的最高次幂去除分子和分母.一般地有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当 } n=m \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } n>m \text{ 时},\\ \infty, & \text{当 } n<m \text{ 时},\end{cases}$$

其中 $a_0\neq 0,b_0\neq 0,m,n$ 为非负整数.

(4) 利用等价无穷小的代换或无穷小的性质求极限.常用的等价无穷小:当 $x\to 0$ 时,$\sin x\sim x,\arcsin x\sim x,\tan x\sim x,\arctan x\sim x,\ln(1+x)\sim x,\mathrm{e}^x-1\sim x,1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\sqrt{1+x}-1\sim\frac{1}{2}x,\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x,(1+x)^\alpha\sim\alpha x,a^x-1\sim x\ln a(a>0,a\neq 1)$.

(5) 分解因式,约去使分母极限为零的公因式,再求极限.

(6) 乘以共轭根式,约去使分母极限为零的公因式,再求极限.

(7) 利用两个重要极限求极限.

(8) 利用极限与左右极限关系求极限.

(9) 利用初等函数在定义域内连续求极限,即 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

以后还将学到:

(10) 利用洛必达法则求极限.

(11) 利用定积分定义求极限.

二、重点

1. 初等函数、复合函数的概念及复合函数的分解、基本初等函数的性质及图像.

2. 利用极限的四则运算法则、两个重要极限、等价无穷小代换等方法求极限.

3. 函数的连续性概念、函数间断点类型的判别、连续函数的介值定理和零点定

理及其应用.

三、难点

1. 分段函数在分段点处的极限存在性和连续性的相关求解与讨论.
2. 极限的计算.
3. 闭区间上连续函数的最值定理与介值定理的综合应用.
4. 多元函数的定义与极限.

典型例题解析

例 1　函数 $f(x)=1-x^2$ 与函数 $g(x)=\sqrt{(1-x^2)^2}$ 是否是同一个函数?

解　不是. 因为在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，函数 $f(x)=1-x^2$，而函数 $g(x)=\sqrt{(1-x^2)^2}$ 为分段函数 $g(x)=\sqrt{(1-x^2)^2}=|1-x^2|$. 当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，$g(x)=1-x^2$；当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$g(x)=x^2-1$，函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不同，因此它们表示两个不同的函数.

注意　判断两个函数是否相同应根据函数的两个要素，若两个函数的定义域和对应法则都相同，则两个函数是同一个函数，否则就是不同的函数.

例 2　函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 与函数 $u=x^2+2$ 能否构成复合函数.

解　不能构成复合函数. 因为对于函数 $y=\sqrt{1-u^2}$ 而言，必须要求变量 u 满足条件：$-1\leqslant u\leqslant 1$，而 $u=x^2+2\geqslant 2$，所以对任意的 x 值，y 都得不到确定的对应值.

例 3　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x+3x^2}{2-x^2+x^3}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x-5}{3x^2-3x+1}$；　(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)^2}{x^2-16}$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$；　(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

解　(1) $$\lim_{x\to\infty}\frac{1-2x+3x^2}{2-x^2+x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x}}{\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{1}{x}+1}=\frac{0}{1}=0.$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+2x-5}{3x^2-3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{5}{x^3}}{\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}=\infty.$$

(3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)^2}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x-4)}{(x-4)(x+4)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{x+4}=0.$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}=0.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+6x+11x^2+6x^3-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}(6+11x+6x^2)=6.$

例 4 判断函数 $f(x)=\begin{cases}e^x, & x>0,\\ x+1, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处是否存在极限，如果存在，求其值.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x=1$，故

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=1,$$

所以函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处存在极限，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

例 5 若函数 $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\leqslant 0,\\ x+1, & x>0,\end{cases}$ 试求 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

解 因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，所以

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x).$$

因为当 $x\to 0$ 时，函数 $f(x)$ 的左、右极限虽各自存在但不相等，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

注意 函数在点 x_0 处的极限与函数在该点有没有定义无关.

例 6 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 2x}{\sin 4x}$.

解 设 $t=x-\dfrac{\pi}{2}$，则 $x=t+\dfrac{\pi}{2}$，当 $x\to\dfrac{\pi}{2}$ 时，$t\to 0$，故有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{\sin 4x}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin 4\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\tan 2t}{\sin 4t}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\tan 2t}{2t}\cdot\frac{4t}{\sin 4t}\right)=\frac{1}{2}.$$

注意　只有当 $x\to 0$ 时，才有$\frac{\sin x}{x}\to 0$，$\frac{\tan}{x}\to 0$. 对本例题，有的同学这样做：

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 2x}{\sin 4x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\tan 2x}{2x}\cdot\frac{4x}{\sin 4x}\right)=\frac{1}{2}.$$

虽然结果碰巧一致，但做法是完全错误的.

例 7　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{x+1}$.

解法 1　观察发现，属于“1^{∞}”型未定式，应将其化成重要极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$的形式，故有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{5}}\right]^{5}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x-1}\right)^{2}=\mathrm{e}^{5}.$$

解法 2　$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)^{x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x-1}\right)=\frac{\mathrm{e}^{4}}{\mathrm{e}^{-1}}=\mathrm{e}^{5}.$$

例 8　证明当 $x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

证　由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{1+x})^{n}-1}{\frac{1}{n}x\left[1+\sqrt[n]{1+x}+\cdots+(\sqrt[n]{1+x})^{n-1}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{nx}{x\left[1+(1+x)^{\frac{1}{n}}+\cdots+(1+x)^{\frac{n-1}{n}}\right]}=\frac{n}{n}=1.$$

故当 $x\to 0$ 时有 $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$.

例 9　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^{3}}$.

解法 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{2}.$$

解法 2 因为当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sin x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\frac{1}{2}.$$

注意 这说明当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3$. 但下面的解法是错误的：

因为当 $x\to 0$ 时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

就是说无穷小的等价代换只能代换乘、除因子；加、减因子不能代换.

例 10 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，又 $f(0)=2$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)\neq f(0)$，因此，点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的第一类间断点，具体地，是可去间断点.

注意 如果在 $x=0$ 处修改定义，令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 则该函数在点 $x=0$ 处连续.

例 11 选取适当的 k 值，使函数 $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{2}{x}}, & x<0,\\ x+k, & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续.

解 因为 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域内有定义，又因为

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{2}{x}}=\mathrm{e}^2,$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x+k)=k,$$

要使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，必须 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，即 $k=\mathrm{e}^2$.

因此，当 $k=\mathrm{e}^2$ 时，函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

例 12　证明方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

证　设函数 $f(x)=x-\cos x$，则该函数在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内连续，且有 $f(0)=-1<0$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}>0$. 由零点定理得，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一点 ξ，使得 $f(\xi)=\xi-\cos\xi=0$，即方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个实根.

例 13　求下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$；　(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解　(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}=\dfrac{2\times1\times2}{1^2+2^2}=\dfrac{4}{5}$.

(2) 令 $u=x^2+y^2$，则当 $x\to0$，$y\to0$ 时，$u\to0$，因此

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{u\to0}\frac{\sin u}{u}=1.$$

(3)
$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2.\end{aligned}$$

课后习题详解

习题 1-1

1. **解**　(1) 否，因为 $y=\sqrt{1-\cos^2x}=|\sin x|$，与 $y=\sin x$ 的对应法则不同.

(2) 是.

(3) 否，两者的定义域与不同，前者的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq1\}$，后者为全体实数.

(4) 否，定义域不同，前者为全体实数，后者为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant1\}$.

2. **解**　(1) 由题可得 $-1\leqslant \frac{x-2}{3}\leqslant 1$，解得 $-1\leqslant x\leqslant 5$，故函数的定义域为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant 5\}$.

(2) 由题可得 $\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x-2\neq 0, \\ 4-x>0, \end{cases}$ 解得其定义域为 $\{x|1\leqslant x<4, x\neq 2\}$.

(3) 由题将分段函数各段的定义域合并起来即为原函数的定义域，故定义域为 $\{x|-1\leqslant x<2\}$.

3. **解**　因为 $-2<-\frac{\pi}{4}<0$，所以 $f(-\frac{\pi}{4})=\sin(-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$；因为 $0<\frac{\pi}{2}<2$，所以 $f(\frac{\pi}{2})=2$.

4. **解**　函数图像如图 1-1 所示.

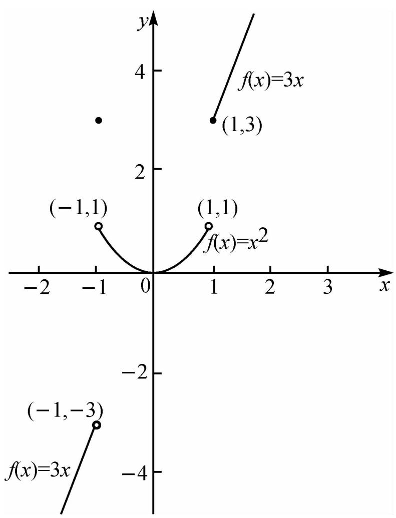


图 1-1

5. **解**　(1) 因为 $y(-x)=\frac{1}{2}(e^{-x}+e^{x})=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})=y(x)$，所以是偶函数.

(2) 因为 $y(-x)=\lg\frac{1-x}{1+x}=\lg(\frac{1+x}{1-x})^{-1}=-\lg\frac{1+x}{1-x}=-y(x)$，所以是奇函数.

(3) 因为 $y=x^2(1-x)$，$y(-x)=x^2(1+x)$，所以非奇非偶.

(4) 因为 $y(-x)=y(x)$,故为偶函数.

6. **解**　(1) 用 y 表示 x 可得 $x=\dfrac{y+3}{2}$,故反函数为 $y=\dfrac{x+3}{2}$.

(2) 用 y 表示 x 可得 $x=\mathrm{e}^{y-1}+1$,故反函数为 $y=\mathrm{e}^{x-1}+1$.

(3) 用 y 表示 x 可得 $x=y^3-1$,故反函数为 $y=x^3-1$.

7. **解**　(1) 因为 $|\sin(x+\pi)|=|\sin x|$,故函数为周期函数,由函数图像可知最小正周期为 π.

(2) 根据题意,函数图像如图 1-2 所示.

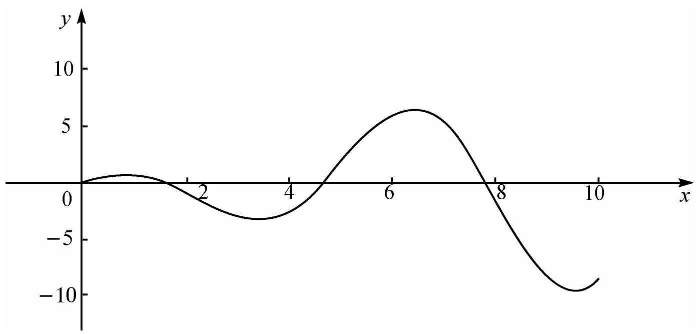


图 1-2

由图 1-2 可知函数 $y=x\cos x$ 的振幅不断增大,故不是周期函数.

(3) 是周期函数,因为函数 $\sin x,\cos\dfrac{x}{2}$ 均为周期函数,又 $\sin x$ 的最小正周期为 2π,$\cos\dfrac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π,故函数 $y=\sin x+\cos\dfrac{x}{2}$ 的最小正周期为 4π.

8. **解**　(1) 函数是由 $y=\sqrt{u},u=1+v^2,v=\sin x$ 复合而成.

(2) 函数是由 $y=\ln u,u=1+v,v=\sqrt{w},w=1+t,t=x^2$ 复合而成.

(3) 函数是由 $y=u^2,u=\cos w,w=1+t,t=\sqrt{x}$ 复合而成.

(4) 函数是由 $y=\arctan u,u=\ln x$ 等简单函数复合而成的.

9. **解**　(1) 由题可得 $\begin{cases}4-x^2-y^2\geqslant 0,\\ x^2+y^2-1>0,\end{cases}$ 解得函数的定义域为 $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$,定义域图像如图 1-3 阴影部分.

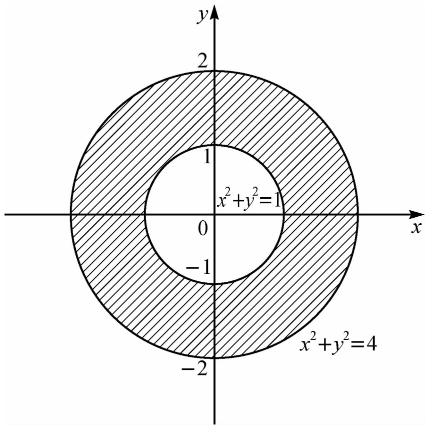


图 1-3

(2) 由题可得$\begin{cases} y \geqslant 0, \\ x \geqslant \sqrt{y}, \end{cases}$即函数的定义域为$\{(x,y) \mid 0 \leqslant y \leqslant x^2, x \geqslant 0\}$，定义域图像为图 1-4 中阴影部分.

(3) 由题可得$\begin{cases} 1-x^2 \geqslant 0, \\ y^2-1 \geqslant 0, \end{cases}$故定义域为$\{(x,y) \mid |x| \leqslant 1, |y| \geqslant 1\}$，定义域图像如图 1-5 阴影部分所示.

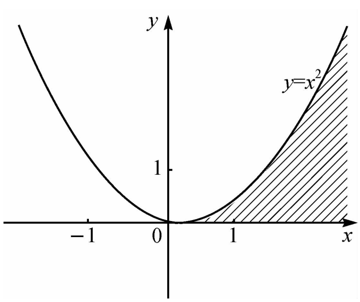


图 1-4

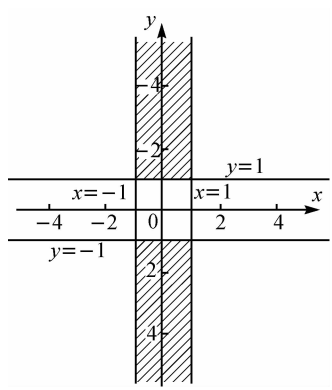


图 1-5

(4) 由题可得$\begin{cases} y-x>0, \\ -1 \leqslant \dfrac{y}{x} \leqslant 1, \end{cases}$当$x>0$时，解得$x>0$且$y>x$，无解；当$x<0$时，解得$x<y\leqslant -x$，故定义域为$\{(x,y) \mid x<y\leqslant -x \text{ 且 } x<0\}$，定义域图像如图 1-6 所示.

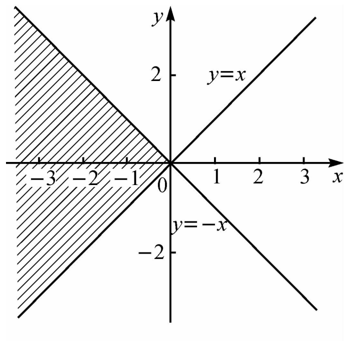


图 1-6

习题 1-2

1. **解**　(1) 因为 $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1+\dfrac{(-1)^n}{n}$，当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{(-1)^n}{n}$ 越来越接近 0，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1$.

(2) 因为 $u_n=\dfrac{3n-1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{4n+2}$，当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{5}{4n+2}$ 越来越接近 0，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{2n+1}=\dfrac{3}{2}$.

(3) 因为当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{2^n}$ 越来越接近 0，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{2^n}\right)=2$.

(4) 因为当 $n\to\infty$ 时，$\dfrac{(-1)^n}{n+1}$ 越来越接近 0，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}=0$.

2. **解**　(1) 函数 $y=\tan x$ 的图像如图 1-7 所示，由图可得 $\lim\limits_{x\to 0}\tan x=0$.

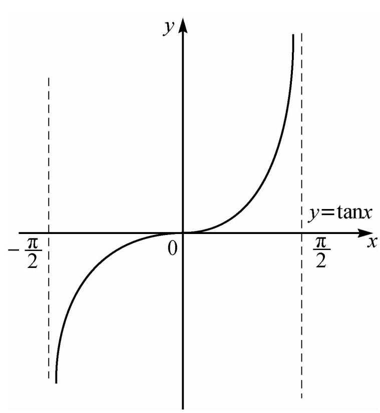


图 1-7

(2) 函数 $y=\cos x$ 的图像如图 1-8 所示，由图可得 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

(3) 函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 的图像如图 1-9 所示，由图可得 $\lim\limits_{x\to -\infty}\operatorname{arccot}x=\pi$.

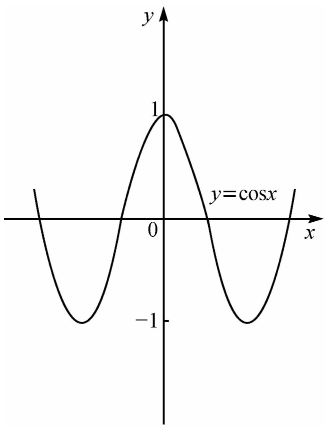


图 1-8

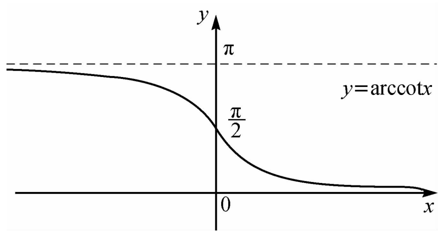


图 1-9

(4) 函数 $y=\operatorname{arccot}x$ 的图像如图 1-9 所示，由图可得 $\lim\limits_{x\to +\infty}\operatorname{arccot}x=0$.

3. **解**　函数 $f(x)$ 的图像如图 1-10 所示，由图可得极限 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$，所以极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

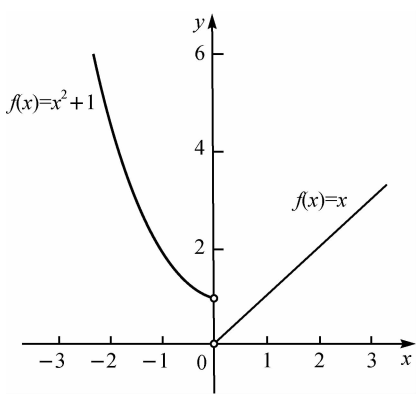


图 1-10

4. **解**　因为 $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$,故 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=-1$,又当 $x\to+\infty$ 时,e^{x} 趋向无限大,故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{e^{x}+1}=0$,而 $\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=1-\dfrac{2}{e^{x}+1}$,故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}=1$,所以极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{x}-1}{e^{x}+1}$ 不存在.

5. **解**　(1) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{y}=\lim\limits_{x\to0}\tan x=0$,故 $y=\cot x$ 是当 $x\to0$ 时的无穷大.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$,所以 $y=e^{-x}$ 是当 $x\to+\infty$ 时的无穷小.

(3) 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{y}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\ln|x|}=0$,所以 $y=\ln|x|$ 是当 $x\to0$ 时的无穷大.

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,故 $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{x}}=1$,因此 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{y}=\lim\limits_{x\to\infty}(2^{\frac{1}{x}}-1)=0$,所以 $y=\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷大.

6. **解**　(1) 因为当 $x\to-2$ 时,$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x+2}{x-1}=0$,当 $x\to1$ 时,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{y}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x+2}=0$,故函数在 $x\to-2$ 时是无穷小,在 $x\to1$ 时是无穷大.

(2) 因为在 $x>0$ 时,函数 $y=\lg x$ 是单调增的,且当 $x\to0^{+}$ 时,$y=\lg x$ 趋近于负无穷大,当 $x\to+\infty$ 时,$y=\lg x$ 趋近于正无穷大,又 $\lim\limits_{x\to1}\lg x=0$,故在 $x\to1$ 时,函数 $y=\lg x$ 是无穷小,在 $x\to0^{+}$ 或 $x\to+\infty$ 时函数 $y=\lg x$ 是无穷大.

(3) 因为 $y=\dfrac{x+3}{x^{2}-1}=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x^{2}-1}$,故当 $x\to\pm1$ 时,函数 $y=\dfrac{x+3}{x^{2}-1}$ 趋近于无穷大,当 $x\to-3$ 时,函数 $y=\dfrac{x+3}{x^{2}-1}$ 趋近于0,$x\to\infty$ 时,函数 $y=\dfrac{x+3}{x^{2}-1}$ 趋近于0,故在 $x\to-3$,$x\to\infty$ 时,函数 $y=\dfrac{x+3}{x^{2}-1}$ 是无穷小;在 $x\to\pm1$ 时,函数 $y=\dfrac{x+3}{x^{2}-1}$ 是无穷大.

7. **解**　(1) 因为 $\left|\cos\dfrac{1}{x}\right|\leqslant1$,$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$,故 $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cos\dfrac{1}{x}=0$.

(2) 因为 $|\sin x|\leqslant1$,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

(3) 因为 $|\arctan x|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\tan\dfrac{1}{x}=0$,故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\tan\dfrac{1}{x}\cdot\arctan x\right)=0$.

习题 1-3

1. **解**　(1) $\lim\limits_{x\to1}(x^3+2x^2-x-1)=\lim\limits_{x\to1}x^3+\lim\limits_{x\to1}2x^2-\lim\limits_{x\to1}x-\lim\limits_{x\to1}1=1.$

(2) 因为$\lim\limits_{x\to2}(x^2+4)=8$,$\lim\limits_{x\to2}(x+2)=4\neq0$,所以$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+4}{x+2}=2.$

(3) 因为$\lim\limits_{x\to1}\mathrm{e}^x=\mathrm{e}$,$\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$,故$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x-1}=\infty.$

(4) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x+4)(x-4)}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}(x+4)=8.$

(5) $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\leftarrow0}\dfrac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=\lim\limits_{h\to0}(2x+h)=2x.$

(6) $$\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{1-x^2}-\frac{1}{1-x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{2-(1+x)}{1-x^2}=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{(1-x)(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{(x+1)}=\frac{1}{2}.$$

(7) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$$

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+2}{1+x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{4x^2+1}{1+x^3}\right)=3.$

(9) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+2x-3}{x^3-x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{1-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^3}}=\infty.$$

(10) $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=2.$$

2. **解**　$\lim\limits_{x\to0^-}\left(\dfrac{1}{2}x^2-2a\right)=-2a$,$\lim\limits_{x\to0^+}(x^2-a+1)=1-a$,因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的极限存在,故 $-2a=1-a$,解得 $a=-1$.

3. **解**　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2x}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{x}=3.$

(3) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin x}{x-\pi}\xlongequal{t=x-\pi}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin(t+\pi)}{t}=-\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=-1.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(2^n\cdot\dfrac{x}{2^n})=x.$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-x)^{-\frac{1}{x}}]^{-3}=\mathrm{e}^{-3}.$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+2}{x})^{x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\dfrac{2}{x})^{\frac{x}{2}}]^2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^3=\mathrm{e}^2.$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{2x+3}{2x+1})^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{2x+1})^{\frac{2x+1}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{2x+1})^{\frac{1}{2}}=\mathrm{e}.$

4. **证**　因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+2x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(x^2+2x)=0$，故结论成立.

5. **解**　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\sin x\cdot\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2 x}{x\cdot x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^2}{x^2}=2.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x)\arctan x}{x\sin 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\cdot x}{x\cdot 2x}=1.$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\dfrac{1}{4}\cdot 2x}=2.$

习题 1-4

1. **解**　(1) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x^2=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2-x)=1.$

因为$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，连续区间为$[0,2]$.

(2) $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}x=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}1=1$，故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.
$\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}x=-1$，$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}1=1$，故 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点. 连续区间为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=\infty$ 不存在，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的无穷间断点. 连续区间为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 2$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点. 连续区间为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

2. **解**　$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\sin 2x=2$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x\sin\dfrac{1}{x}+b)=b$，因为

$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，故 $a=b=2$.

3. **解** (1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\ln(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x)=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\ln(1+x)}{\ln a}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{x\ln a}=\dfrac{1}{\ln a}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}}=\frac{1}{2}.$$

4. **解** (1) 函数 $y=\dfrac{x}{x+1}$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq-1\}$，当 $x=-1$ 时，因为 $\lim\limits_{x\to-1}y=\lim\limits_{x\to-1}(1-\dfrac{1}{x+1})=\infty$，所以 $x=-1$ 是函数 $y=\dfrac{x}{x+1}$ 的无穷间断点.

(2) 函数 $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq0\}$，当 $x\to0$ 时，函数的极限不存在且当 $x\to0$ 时函数 $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$ 在 0 到 1 之间无限次的震荡，故 $x=0$ 是函数的震荡间断点.

(3) 函数 $y=\dfrac{x}{\sin x}$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq k\pi\}$，由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，故 $x=0$ 是函数 $y=\dfrac{x}{\sin x}$ 的可去间断点，补充定义 $y(0)=1$ 可使函数在 $x=0$ 处连续，当 $x\to k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时，函数趋向于无穷，故 $x=k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是函数的无穷间断点.

(4) 函数 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq0\}$，因为 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，故 $x=0$ 是函数的可去间断点，补充定义 $y(0)=\mathrm{e}$，则函数 $y=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处连续.

(5) 函数 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq0\}$，由 $\lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=\infty$，故 $x=0$ 是函数 $y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ 的无穷间断点.

(6) 函数 $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 的定义域为 $\{x|-1\leqslant x\leqslant1,x\neq0\}$.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=1,$$

补充定义 $y(0)=1$，则函数 $y=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 在 $x=0$ 处连续.

5. **证**　令函数 $f(x)=x^5-3x-1$，因为 $f(1)=1-3-1=-3$，$f(2)=32-6-1=25$，$f(1)\cdot f(2)<0$，由零点定理可知存在一点 $\xi\in(1,2)$，使得 $f(\xi)=0$，即 $\xi^5-3\xi=1$，结论得证.

6. **证**　令函数 $f(x)=x\cdot 2^x-1$，$f(0)=-1$，$f(1)=1\cdot 2^1-1=1$，因为 $f(1)\cdot f(0)<0$，故由零点定理可知存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$，结论得证.

7. **解**　令函数 $G(x)=f(x)-g(x)$，显然 $G(a)\cdot G(b)<0$，故由零点定理可知存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $G(\xi)=0$，即 $f(\xi)=g(\xi)$，结论得证.

8. **解**　(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sin(xy)}{xy}\cdot y=0.$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{\sqrt{xy+4}-2}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{(xy+4)-4}{xy(\sqrt{xy+4}+2)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+4}+2}=\dfrac{1}{4}.$

复习题一

一、填空题

1. $[-1,2)$.

2. -3.

提示：$f[f(x)]=\dfrac{a\cdot\dfrac{ax}{2x+3}}{2\cdot\dfrac{ax}{2x+3}+3}=x$，化简得$\dfrac{a^2}{2ax+3(2x+3)}=1$，则解得$a=-3$.

3. 0；1.

提示：令 $t=\dfrac{1}{x}$.

4. 1.

提示：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{3}{2}x}{f(2\cdot\dfrac{3}{2}x)}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}=1.$

5. 2.

提示：$f(x)-2$ 是 $x-1$ 在 $x\to 1$ 时的等价无穷小.

二、选择题

1. A.

提示：$(\frac{1+x}{x})^2=(1+\frac{1}{x})^2$，令 $t=\frac{1}{x}$.

2. D.

提示：函数 $y=\lg(x-1)$ 的定义域为 $\{x|x>1\}$，当 $x\to1$ 或 $x\to\infty$ 时函数都无界.

3. C.

提示：$\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{kx}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{2}{x})^{(-\frac{x}{2})\cdot(-2k)}=e^{-2k}=e^3$.

4. D.

5. B.

提示：$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}(x-1)=-2$.

三、综合题

1. **解** (1) 显然函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2) 函数 $f(x)$ 的图形如图 1-11 所示.

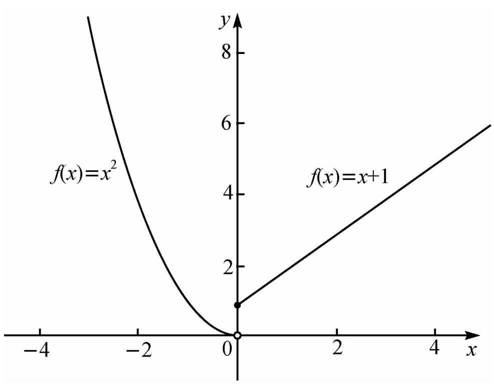


图 1-11

(3) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x^2=0$；$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$；

因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ 故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 不存在；$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}(1+x)=2$.

(4) 由(3) 可知 $f(x)$ 在 $x=0$ 处间断，$x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点.

2. **解** (1) 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$，故 $\ln x$ 是 $x\to0^+$ 时的无穷大.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+2x}{x^2}=0$,故$\dfrac{1+2x}{x^2}$是$x\to\infty$时的无穷小.

(3) 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$,故$e^{-x}$是$x\to+\infty$时的无穷小.

(4) 因为$\lim\limits_{x\to0^+}3^{\frac{1}{x}}=+\infty$,故$3^{\frac{1}{x}}$是$x\to0^+$时的无穷大.

3. **解**　(1) 因为函数$|\arctan x|<\dfrac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}=0$,故$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}\arctan x=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(\frac{2}{3})^n+3}{(\frac{2}{3})^n+1}=3$.

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)-3}{(x-1)(\sqrt{x+2}+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}x\tan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}(x\cdot\dfrac{1}{x})=1$.

(5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}[(1+\cos x)^{\sec x}]^2=e^2$.

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-x^2)-1}{\frac{1}{2}x^2(\sqrt{1-x^2}+1)}=-1$.

(7) $$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\pi^2-x^2}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin x}{(\pi+x)(\pi-x)}\xlongequal{t=\pi-x}\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin(\pi-t)}{(2\pi-t)t}$$
$$=\lim\limits_{t\to0}\frac{\sin t}{(2\pi-t)t}=\frac{1}{2\pi}.$$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{3x}=\dfrac{2}{3}$.

4. **解**　由$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^2+bx+5}{x+2}=5$得$a=0$,又$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{bx+5}{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b+\frac{5}{x}}{1+\frac{2}{x}}=b$,所以$b=5$.

5. **解**　(1)$x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$,故$x=1$、$x=2$是函数的间断点,由$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2$知$x=1$是函数的可去间断点;由$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+1}{x-2}=\infty$知$x=2$是函数的无穷间断点.

(2) 显然函数在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$上连续，又$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^x=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，所以$x=0$是函数的跳跃间断点.

(3) 函数$y=\cos\dfrac{1}{x^2}$的定义域为$\{x\mid x\in\mathbf{R},x\neq 0\}$，当$x\to 0$时，函数极限不存在，且函数在$-1$到$1$之间无限次震荡，故$x=0$是函数的震荡间断点.

6. **证**　令$f(x)=x-2\sin x-1$，$f(0)=-1$，$f(3)>0$，因为$f(0)\cdot f(3)<0$，由零点定理可知存在一点$\xi\in(0,3)$，使得$f(\xi)=0$，即$\xi-2\sin\xi=1$，结论得证.