第二章

导数与微分

学习目标

(1)理解导数的概念、几何意义及函数的可导性与连续性之间的关系.
(2)掌握导数的四则运算法则和复合函数的求导法则,掌握基本初等函数的导数公式.
(3)了解高阶导数的概念,掌握初等函数一阶、二阶导数的求法.
(4)会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶、二阶导数.
(5)理解微分的概念,了解微分的四则运算法则和一阶微分形式不变性.

第一节　导 数 概 述

在很多实际问题中,函数相对于自变量的变化快慢的程度问题是一个很重要的研究内容. 例如,物理学中的物体运动的速度、电工学中的电流强度、经济学中的边际成本等,所有这些在数量关系上都可归结为函数的变化率,即导数. 而微分则与导数密切相关,它指明当自变量有微小变化时函数大体上的变化情况.

一、导数引例

1. 平面曲线的切线的斜率

设曲线方程为 $y=f(x)$,点 $M(x_0,f(x_0))$为曲线上一定点,在曲线上另取一点 $N(x_0+\Delta x,f(x_0+\Delta x))$,连接点 M 和点 N 得到割线 MN(图 2-1). 当点 N 沿曲线无限趋于点 M 时,称割线 MN 的极限位置 MT 为曲线 $y=f(x)$在点 M 处的切线.

下面我们来求曲线 $y=f(x)$在点 M 处的切线的斜率. 根据切线的定义,我们知道割线的极限位置就是切线,因此割线斜率的极限就是切线的斜率,而割线的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

当点 N 沿曲线 $y=f(x)$无限趋于点 M 时,即有 $\Delta x\to 0$,因而切线 MT 的斜率为

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

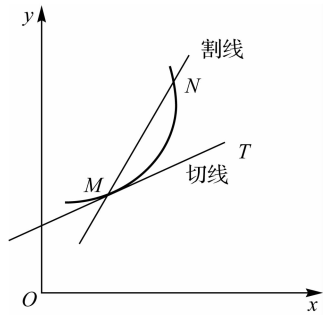

图 2-1

2. 变速直线运动的速度

设一物体做变速直线运动，其路程函数为 $s=s(t)$，求该物体在 t_0 时刻的瞬时速度. 给时间 t 在 t_0 时刻一增量 Δt，则位移增量 $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$. 当物体做匀速运动时，它的速度不随时间而改变，即 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$ 是一个常量，它是物体在 t_0 时刻的速度，也是物体在任意时刻的速度. 但是，当物体做变速运动时，它的速度会随着时间而改变，而 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 表示从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的平均速度 $\bar{v}$，即

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

当 Δt 很小时，即时间间隔很小时，动点的运动状况来不及发生大的变化，我们可以用 $\bar{v}$ 近似地表示物体在 t_0 时刻的瞬时速度，Δt 越小，$\bar{v}$ 就越接近于物体在 t_0 时刻的瞬时速度；Δt 无限变小，$\bar{v}$ 就无限接近于物体在 t_0 时刻的瞬时速度，即

$$v\big|_{t=t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

就是说，物体运动的瞬时速度是当时间增量趋于零时路程函数的增量和时间的增量之比的极限.

以上两个实例虽然是背景完全不同的具体问题，一个是几何问题，一个是物理问题，但解决问题的思路相同，其结果也有相同的数学结构——都可归结为“差商的极限”这一数学模型：当自变量趋于零时函数增量与自变量增量之商的极限.

在实际生活中还有很多不同类型的函数的变化率问题，如经济学中的边际成本、边际利润，物理学中的细杆线密度、电流强度，社会学中的人口增长率，等等. 我们用统一的方式对这些问题加以处理，撇开各个问题的具体含义，抽取它们在数量方面的共性进行研究，就抽象得到了一个实用性更广泛的数学概念——导数.

二、导数的概念

定义 2-1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx（$x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，函数 y 相应地取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为

$$f'(x_0),y'|_{x=x_0},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0} 或 \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\bigg|_{x=x_0}$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，有时也说成函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处具有导数或导数存在.

导数定义还有不同的表达形式，常见的有 $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，其中 $x=x_0+\Delta x$.

如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

由定义可知，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线的斜率可写为 $k=f'(x_0)$；而在变速直线运动 $s=s(t)$ 中，物体在 t_0 时刻的瞬时速度可写为 $v(t_0)=s'(t_0)$.

既然导数是用极限定义的，而极限又有左、右极限之分，则导数自然也有左、右导数的概念.

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

以上两式分别称为**左、右导数**，统称为**单侧导数**.

定理 2-1 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左导数和右导数都存在且相等，即

$$f'(x_0)=A\Leftrightarrow f'_-(x_0)=A=f'_+(x_0).$$

如果函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点处都可导，则称函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导. 如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内可导，且在点 a 处存在右导数，在点 b 处存在左导数，则称函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可导.

如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I 中的每一点 x 处可导，则对 $\forall x\in I$，均有一导数值与之对应，这时就构造了一个新的函数，称为 $y=f(x)$ 在区间 I 内的导函数(简称导数)，也可以说成 y 对 x 的导数，记为 $y=f'(x)$，或 y'，或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$ 等. 所以

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} 或 y'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

由此可见，$y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $y=f'(x)$ 在点 $x=x_0$ 处的值.

三、求导数举例

下面举例说明如何按导数的定义求一些简单函数的导数.

例 2-1 求函数 $f(x)=C$(C 为常数)的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0$，即 $(C)'=0$.

例 2-2 设 $f(x)=x^n$（n 为正整数），求 $f'(x)$.

解 根据导数的定义，并利用牛顿二项展开式，可得

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{C_n^1x^{n-1}h+C_n^2x^{n-2}h^2+\cdots+h^n}{h}$$
$$=nx^{n-1}$$

亦即

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

一般地，有

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}\quad(\mu\in\mathbf{R})$$

这是幂函数的导数公式，它的证明将在下一节中给出.

利用此公式，可以方便地求出幂函数的导数，例如：

$$(x)'=1\cdot x^0=1$$
$$(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1x^{-1-1}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}\quad(x\neq 0)$$

上述三个幂函数的导数在以后的计算中经常用到，应熟记.

例 2-3 求函数 $f(x)=\sin x$ 的导数.

解 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$
$$=\cos x\cdot 1=\cos x,$$

即

$$(\sin x)'=\cos x$$

类似地，可以求得

$$(\cos x)'=-\sin x$$

例 2-4 求 $f(x)=\log_a x\,(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

当讨论分段函数在分段点处的可导性时，需用导数的定义来解答.

例 2-5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1, & x\leqslant 1\\ \sqrt{x}, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的可导性.

解 $$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(2x-1)-1}{x-1}=2$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{2}$$

因 $f'_-(1)\neq f'_+(1)$,故 $f'(1)$不存在,即函数 $f(x)$在点 $x=1$ 处不可导.

四、导数的几何意义

函数 $y=f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$等于曲线 $y=f(x)$在点 $M_0(x_0,y_0)$处的切线的斜率. 即 $f'(x_0)=\tan\alpha$,其中 α 是切线的倾斜角,如图 2-2 所示.

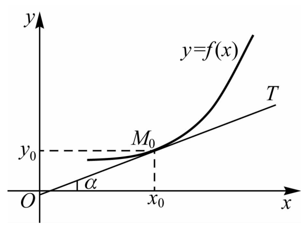

图 2-2

注意:若 $f'(x_0)=0$,则曲线 $y=f(x)$在点 $M_0(x_0,y_0)$处有平行于 x 轴的切线;若 $f'(x_0)=\infty$,则曲线 $y=f(x)$在点 $M_0(x_0,y_0)$处有垂直于 x 轴的切线.

根据导数的几何意义可得,曲线 $y=f(x)$在点 $M_0(x_0,y_0)$处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)\quad [f'(x_0)\neq 0]$$

若 $f'(x_0)=0$,则法线方程为 $x=x_0$.

例 2-6 求曲线 $y=x^3$ 在点(1,1)处的切线方程和法线方程.

解 $y'=(x^3)'=3x^2$, 斜率 $k=y'|_{x=1}=3$,又点(1,1)在曲线上,故过点(1,1)的切线方程为

$$y-1=3(x-1)$$

即

$$3x-y-2=0$$

法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$$

即

$$x+3y-4=0$$

五、可导性与连续性的关系

定理 2-2 若函数 $y=f(x)$在点 x_0 处可导,则必在点 x_0 处连续.

证明 因为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$，则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0$$

因此，函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续. 证毕.

需要注意的是，函数连续只是函数可导的必要条件，不是充分条件，即一个函数在某一点处连续，却不一定在该点处可导. 例如：

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处连续但不可导.

因为 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$，即 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处连续.

而

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x-0}{\Delta x}=-1$$

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x-0}{\Delta x}=1$$

即 $f'_-(0)\neq f'_+(0)$，故 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处不可导.

上述结论容易从图 2-3 中看出，函数 $f(x)=|x|$ 在点 $x=0$ 处是连续的，但在该点处出现"尖角"，切线不存在，从而切线的斜率(导数)不存在.

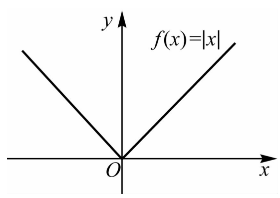

图 2-3

例 2-7 设函数 $y=\begin{cases}ax, & x\leqslant 0\\ \sin 2x+b, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导，求 a,b 的值.

解 因函数 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，故函数在点 $x=0$ 处连续，即

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^-}f(x)$$

即

$$\lim_{x\to 0^+}(\sin 2x+b)=\lim_{x\to 0^-}ax$$

所以，$b=0$.

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x+b-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin 2x}{x}=2$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{ax}{x}=a$$

而 $f'(0)$ 存在，即 $f'_+(0)=f'_-(0)$，所以 $a=2$.

故当 $a=2,b=0$ 时,函数 $y=\begin{cases} ax, & x\leqslant 0 \\ \sin 2x+b, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导.

习题 2-1

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^{1.6}$; (2) $y=x^5$; (3) $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$;

(4) $y=\dfrac{1}{x^2}$; (5) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; (6) $y=x^2\cdot\sqrt[5]{x^2}$.

2. 试讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

3. 求等边双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$ 处的切线的斜率,并写该点处的切线方程和法线方程.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2\sin x, & x\leqslant 0 \\ a+bx, & x>0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处可导,试确定 a,b 的值.

5. 设 $f'(x_0)$ 存在,求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$; (2) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$;

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$; (4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+ah)-f(x_0-bh)}{h}$.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1 \\ ax+b, & x>1 \end{cases}$,为了使函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处连续且可导,a,b 应取什么值?

第二节 函数的求导法则

前面我们根据导数的定义,求出了一些简单函数的导数,但是对于一些较为复杂的函数,按照定义来求它们的导数往往很困难.所以在实际计算中,人们常利用导数的基本公式和求导法则来求已知函数的导数.

一、函数的和、差、积、商的求导法则

定理 2-3 设函数 $u=u(x),v=v(x)$ 在点 x 处可导,则它们的和、差、积、商(分母为零的点除外)也在点 x 处可导,且有以下求导法则:

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\,[v(x)\neq 0]$.

证明 (1)用导数的定义证明.

$$[u(x)\pm v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$=u'(x)\pm v'(x)$$

证毕.

(2) $$[u(x)v(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}v(x+\Delta x)+u(x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)+u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}$$
$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

其中,$\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)$是由于 $v(x)$在点 x 处可导,故 $v(x)$在点 x 处连续. 证毕.

(3)类似可证(证明从略).

上述四则运算的求导法则可以简单地表示为

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$
$$(uv)'=u'v+uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad(v\neq 0)$$

定理中的法则(1)和法则(2)可推广到任意有限个可导函数的情形,例如:

$$(u+v-w)'=u'+v'-w'$$
$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'$$

特别地,在法则(2)中,当 $v(x)=C$(C 为常数)时,有

$$(Cu)'=Cu'$$

例 2-8 设 $y=2x^3-\cos x+\ln x+5$,求 y'.

解 $y'=(2x^3-\cos x+\ln x+5)'=2(x^3)'-(\cos x)'+(\ln x)'+(5)'$

$$=2\times 3x^2+\sin x+\frac{1}{x}+0=6x^2+\sin x+\frac{1}{x}.$$

例 2-9 设 $y=\sin 2x$,求 y'.

解 $y'=(2\sin x\cos x)'=2(\sin x\cos x)'$

$$=2[(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)']$$
$$=2(\cos^2 x-\sin^2 x)=2\cos 2x.$$

例 2-10 求证:$(\tan x)'=\sec^2 x$, $(\sec x)'=\sec x\tan x$.

证明 $$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即$(\tan x)'=\sec^2 x$.

$$(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}=\sec x\tan x$$

即 $(\sec x)'=\sec x\tan x$.

类似可证：$(\cot x)'=-\csc^2 x$，$(\csc x)'=-\csc x\cot x$.

这分别是正切函数、正割函数、余切函数、余割函数的导数公式，要熟记于心.

例 2-11 设 $y=e^x\sin x$，求 y'.

解 $y'=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$.

例 2-12 求 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$的导数.

解 $$y'=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}.$$

例 2-13 求 $y=2x^3+x\sec x+\dfrac{\cos x}{x}$的导数.

解 $$y'=(2x^3)'+(x\sec x)'+\left(\frac{\cos x}{x}\right)'$$
$$=6x^2+\sec x+x\sec x\tan x+\frac{-x\sin x-\cos x}{x^2}$$
$$=6x^2+\sec x+x\sec x\tan x-\frac{x\sin x+\cos x}{x^2}.$$

二、反函数的求导法则

定理 2-4 若函数 $x=f(y)$在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$在对应区间 $I_x=\{x\,|\,x=f(y),y\in I_y\}$内也可导，且导数
$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}$$

证明 由于函数 $x=f(y)$在区间 I_y 内单调、可导(从而连续)，所以 $x=f(y)$的反函数 $y=f^{-1}(x)$存在，且 $y=f^{-1}(x)$也单调、连续.

因为函数 $y=f^{-1}(x)$是单调的，故 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\neq 0$，于是
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

又因为函数 $y=f^{-1}(x)$是连续的，故
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

因此
$$[f^{-1}(x)]'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}$$

下面用上述结论来求反三角函数及对数函数的导数.

例 2-14 设 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$，求 y'.

解 单调连续函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$的反函数 $x=\log_a y$ 在$(0,+\infty)$内可导，且导数 $\dfrac{dx}{dy}=(\log_a y)'=\dfrac{1}{y\ln a}\neq 0$，由反函数的求导法则，得

$$y'=(a^x)'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{(\log_a y)'}=\frac{1}{\frac{1}{y\ln a}}=y\ln a=a^x\ln a$$

即$(a^x)'=a^x\ln a$.

特别地，当$a=\mathrm{e}$时，有$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$.

例 2-15 设$y=\arcsin x$，求y'.

解 函数$y=\arcsin x(-1\leqslant x\leqslant 1)$是函数$x=\sin y$在$\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$上的反函数. 单调连续函数$x=\sin y$在$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$内可导，$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=(\sin y)'=\cos y\neq 0$，由反函数的求导法则，得

$$y'=(\arcsin x)'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

即$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

同理有$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$，$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

三、复合函数的求导法则

到目前为止，对于复合函数，如$\ln\tan x$，e^{2x}，$\sin\frac{2x}{1+x^2}$，还不会求它们的导数. 下面的重要法则可以给出解答，从而使可以求得导数的函数的范围得到很大扩充.

复合函数求导法则 如果$u=g(x)$在点x处可导，而$y=f(u)$在相应点$u=g(x)$处可导，则复合函数$y=f[g(x)]$在点x处可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)g'(x)\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

证明 由于$y=f(u)$在点u处可导，因此

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$$

存在. 所以，根据极限与无穷小的关系有

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha$$

其中，α是当$\Delta u\to 0$时的无穷小. 上式中$\Delta u\neq 0$，用Δu乘上式两边，得

$$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$$

当$\Delta u=0$时，规定$\alpha=0$，这时因$\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)=0$，而$f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$亦为零，故$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$对$\Delta u=0$也成立. 用$\Delta x(\Delta x\neq 0)$除$\Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u$两边，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

于是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]$$

根据函数在某点处可导必在该点处连续的性质可知，当$\Delta x\to 0$时，$\Delta u\to 0$，从而可以

推知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0$$

又因 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=g'(x)$$

故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(u)g'(x)$$

证毕.

复合函数的求导法则可以推广到多个中间变量的情形. 例如，设 $y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$ 均在点 x 处可导，则复合函数 $y=f\{\varphi[\psi(x)]\}$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

例 2-16 设 $y=\ln\tan x$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $y=\ln u$，$u=\tan x$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}\sec^2 x=\frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{\sin x\cos x}$$

例 2-17 设 $y=(x^2+1)^{10}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 令 $y=u^{10}$，$u=x^2+1$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=10u^9\cdot 2x=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9$$

例 2-18 $y=\ln\cos(\mathrm{e}^x)$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $y=\ln\cos(\mathrm{e}^x)$ 可分解为 $y=\ln u$，$u=\cos v$，$v=\mathrm{e}^x$. 因 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{u}$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}=-\sin v$，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^x$，故 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}(-\sin v)\mathrm{e}^x=-\frac{\sin(\mathrm{e}^x)}{\cos(\mathrm{e}^x)}\mathrm{e}^x=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x)$.

若不写出中间变量，则此例可以写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[\ln\cos(\mathrm{e}^x)]'=\frac{1}{\cos(\mathrm{e}^x)}[\cos(\mathrm{e}^x)]'=\frac{-\sin(\mathrm{e}^x)}{\cos(\mathrm{e}^x)}(\mathrm{e}^x)'=-\mathrm{e}^x\tan(\mathrm{e}^x)$$

例 2-19 设 $y=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $y'=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}$.

例 2-20 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$，求 y'.

解 $y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}2x\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

例 2-21 设 $f(x)$是可导函数，$y=f(x^2)+f^2(x)$，求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[f(x^2)]'+[f^2(x)]'$$
$$=f'(x^2)\cdot 2x+2f(x)f'(x)=2xf'(x^2)+2f(x)f'(x)$$

注意：记号$[f(x^2)]'$的含义是对整个复合函数中的自变量 x 求导，而记号 $f'(x^2)$的含义是将 x^2 看作一个整体中间自变量 u 的导数，即 $f'(u)\big|_{u=x^2}$，显然，它们是不同的，故写成下式更清楚：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}f^2(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}\cdot\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}f^2(x)}{\mathrm{d}f(x)}\cdot\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$
$$=\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}(x^2)}\cdot 2x+2f(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

例 2-22 设 $x>0$，证明幂函数的导数公式

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$$

证明 因为 $x^\mu=\mathrm{e}^{\ln x^\mu}=\mathrm{e}^{\mu\ln x}$，所以

$$(x^\mu)'=(\mathrm{e}^{\mu\ln x})'=\mathrm{e}^{\mu\ln x}(\mu\ln x)'=x^\mu\mu\frac{1}{x}=\mu x^{\mu-1}$$

四、基本初等函数的导数公式

基本初等函数的导数公式在初等函数的求导运算中起着重要的作用，在后面的学习过程中会经常用到，必须熟练掌握. 为了便于查阅，现在把这些导数公式归纳如下：

(1) $(C)'=0$； (2) $(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$；

(3) $(a^x)'=a^x\ln a$； (4) $(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$；

(5) $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$； (6) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$；

(7) $(\sin x)'=\cos x$； (8) $(\cos x)'=-\sin x$；

(9) $(\tan x)'=\sec^2 x$； (10) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

(11) $(\sec x)'=\sec x\tan x$； (12) $(\csc x)'=-\csc x\cot x$；

(13) $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$； (14) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；

(15) $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$； (16) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$.

习题 2-2

1. 求下列函数的导数.

(1) $y=6x^3-5x^2+4x+3$； (2) $y=2\cos x-3\tan x+4\sin x$；

(3) $y=2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+3^4$； (4) $y=\frac{x^5+\sqrt{x}+1}{x^3}$；

(5) $y=\mathrm{e}^x\cos x$； (6) $y=x\sin x\ln x$；

(7) $y=\frac{\ln x}{x^2}$； (8) $y=\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$；

(9) $y=3\arcsin x+2\arccos x$； (10) $y=(1+x)^2\arctan x$.

2. 求下列函数在指定点处的导数.

(1) $y=6a^x-3\tan x+5(a>0)$，求 $y'|_{x=0}$；

(2) $y=\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$，求 $y'|_{x=4}$.

3. 求下列函数的导数.

(1) $y=(2x+5)^4$；(2) $y=\sqrt{a^2-x^2}$；(3) $y=\mathrm{e}^{-3x^2}$；

(4) $y=\ln(1+x^2)$；(5) $y=\sin^2 x$；(6) $y=\cos(4-3x)$；

(7) $y=\tan x^2$；(8) $y=\arctan \mathrm{e}^x$；

(9) $y=(\arcsin x)^2$；(10) $y=\ln\cos x$.

4. 求下列函数的导数.

(1) $y=\arcsin(1-2x)$；　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(3) $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos 3x$；

(4) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$；　(5) $y=\dfrac{1-\ln x}{1+\ln x}$；　(6) $y=\dfrac{\sin 2x}{x}$；

(7) $y=\arcsin\sqrt{x}$；　(8) $y=\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$；　(9) $y=\ln(\sec x+\tan x)$；

(10) $y=\ln(\csc x-\cot x)$.

5. 已知函数 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数.

(1) $y=f(\sqrt{x})$；　(2) $y=\sqrt{f(x)}$；

(3) $y=f(\mathrm{e}^x)$；　(4) $y=\mathrm{e}^{f(x)}$.

6. 求下列函数的导数.

(1) $y=\mathrm{e}^{-x}(x^2-2x+3)$；　(2) $y=\sin^2 x\cdot\sin x^2$；　(3) $y=\left(\arctan\dfrac{x}{2}\right)^2$；

(4) $y=\ln\cos\dfrac{1}{x}$；　(5) $y=x\arcsin\dfrac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$；　(6) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

7. 已知曲线 $y=ax^3$ 和直线 $y=x+b$ 在点 $x=1$ 处相切，问 a 和 b 应取何值？

第三节　高 阶 导 数

一、高阶导数的概念

设物体做变速直线运动，则物体运动的速度是路程 $s=s(t)$ 对时间 t 的导数. 即

$$v=s'(t)=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

此时，若速度 v 仍是时间 t 的函数，则可以求速度 v 对时间 t 的导数，用 a 表示，即

$$a=v'(t)=(s')'$$

则 a 为物体运动的加速度. 我们把导数 $(s')'$ 称为路程 s 对时间 t 的二阶导数. 引入一般函数 $y=f(x)$ 的二阶导数及高阶导数的概念如下：

若函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在点 x 处可导，则 $f'(x)$ 在点 x 处的导数称为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的二阶导数，记作

$$y'',f''(x),\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\text{或}\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}$$

即

$$y''=(y')',\ f''(x)=[f'(x)]',\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\text{或}\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}f'(x)}{\mathrm{d}x}$$

相应地，把函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 称为 $y=f(x)$ 的一阶导数.

类似地，把函数 $y=f(x)$ 的二阶导数的导数称为 $y=f(x)$ 的**三阶导数**，三阶导数的导数称为四阶导数……，分别记作

$$y''',f'''(x),\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}\text{或}\frac{\mathrm{d}^3f(x)}{\mathrm{d}x^3},\cdots$$

一般地，函数 $y=f(x)$ 的 $(n-1)$ 阶导数的导数叫作函数 $y=f(x)$ 的 n 阶导数，记作

$$y^{(n)},f^{(n)}(x),\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}\text{或}\frac{\mathrm{d}^nf(x)}{\mathrm{d}x^n}$$

即

$$f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$$

二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

二、高阶导数的计算

由定义求高阶导数就是接连多次求导，因此，可用函数的求导法则及求导公式计算高阶导数，下面举例说明高阶导数的计算方法.

例 2-23 设 $y=\ln(1+x^2)$，求 y''.

解

$$y'=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$y''=2\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=2\,\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

例 2-24 设 $y=(1+x^2)\arctan x$，求 y''.

解

$$y'=2x\arctan x+(1+x^2)\frac{1}{1+x^2}=2x\arctan x+1$$

$$y''=2\left(\arctan x+x\,\frac{1}{1+x^2}\right)=2\arctan x+\frac{2x}{1+x^2}$$

例 2-25 设 $y=\mathrm{e}^x$，求 $y^{(n)}$.

解 $y'=\mathrm{e}^x,y''=\mathrm{e}^x,\cdots,y^{(n)}=\mathrm{e}^x$，即 $(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$.

例 2-26 设 $y=\sin x$，求 $y^{(n)}$.

解

$$y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y'''=\left[\sin\left(x+2\times\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+2\times\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\times\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cdots$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

类似可得，$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

习题 2-3

1. 求下列函数的二阶导数.

(1) $y=2x^2+\ln x$； (2) $y=e^{2x-1}$； (3) $y=x\cos x$；

(4) $y=e^{-x}\sin x$； (5) $y=\sqrt{a^2-x^2}$； (6) $y=\tan x$；

(7) $y=(1+x^2)\arctan x$； (8) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

2. 设 $f''(u)$存在，求下列函数的二阶导数$\frac{d^2y}{dx^2}$.

(1) $y=f(x^2)$； (2) $y=f(\sin x)$.

3. 求下列函数的 n 阶导数.

(1) $y=xe^x$； (2) $y=\sin^2 x$.

第四节 隐函数的导数及由参数方程所确定的函数的导数

一、隐函数及其导数

用式子表示函数关系可以有不同的形式，形如 $y=f(x)$的函数称为显函数，如 $y=\ln x$，$y=\tan x+\sqrt{1-x^2}$等. 以前我们所遇到的函数大部分为显函数.

二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为隐函数. 其中因变量 y 不一定能用自变量 x 直接表示出来. 例如，$xe^y-y+1=0$ 所确定的函数就不能写成 $y=f(x)$（显函数）的形式，因而称为隐函数.

把一个隐函数化成显函数，叫作隐函数的显化. 例如，从方程 $x+y^3-1=0$ 解出 $y=\sqrt[3]{1-x}$，就把隐函数化成了显函数. 隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的. 但在实际问题中，有时需要计算隐函数的导数，因此，我们希望有一种方法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程算出它所确定的隐函数的导数.

若 $F(x,y)=0$ 在一定条件下能确定 y 是 x 的函数 $y=y(x)$，且 $y=y(x)$可导，则此隐函数的导数 $y'=y'(x)$可以从方程

$$\frac{d}{dx}F(x,y)=0$$

直接求得，其中 $F(x,y)$中的 y 必须当作 x 的函数. 这种求导方法叫作隐函数求导法.

例 2-27 求由方程 $xy-e^x+e^y=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$的导数$\frac{dy}{dx}$.

解 把方程两边分别对 x 求导[注意 $y=y(x)$]，得

$$(xy-e^x+e^y)'=0$$

即

$$1\cdot y+x\frac{dy}{dx}-e^x+e^y\frac{dy}{dx}=0$$

从而

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-y}{e^y+x}\quad (e^y+x\neq 0)$$

例 2-28 求由方程 $\arctan\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$ 所确定的隐函数的导数 y'.

解 方程两边同时对 x 求导,得

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+y^2}(2x+2yy')$$

整理得

$$(x-y)y'=x+y$$

解得

$$y'=\frac{x+y}{x-y}$$

例 2-29 求由方程 $y^5+2y-x-3x^7=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 在点 $x=0$ 处的导数 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解 方程两边同时对 x 求导,得

$$5y^4\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}-1-21x^6=0$$

所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+21x^6}{5y^4+2}$$

因 $x=0$ 时,$y=0$,故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\dfrac{1}{2}$.

注意:在对隐函数求导的过程中,必须明确因变量 y 为自变量 x 的函数,同时要应用复合函数求导法则.

二、对数求导法

对于某些问题,利用对数求导法求函数的导数比通常的方法简便些. 所谓对数求导法是先在 $y=f(x)$ 的两边取对数,然后用隐函数求导法求出 y'. 下面通过例子来说明这种方法.

例 2-30 求 $y=x^{\sin x}(x>0)$ 的导数.

解 $y=x^{\sin x}$ 既不是幂函数也不是指数函数,通常称为幂指函数. 为了求这种函数的导数,可以先在两边取对数,得

$$\ln y=\sin x\ln x$$

然后在上式两边对 x 求导,注意到 y 是 x 的函数,得

$$\frac{1}{y}y'=\cos x\ln x+\sin x\frac{1}{x}$$

于是

$$y'=y\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\frac{\sin x}{x}\right)$$

由于对数具有化积商为和差的性质,因此可以将多因子乘积开方的求导运算通过取对数进行化简.

例 2-31 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$的导数.

解 两边取对数得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)]$$

上式两边对 x 求导,注意到 y 是 x 的函数,得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)$$

于是

$$\begin{aligned}y'&=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)\\&=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right)\end{aligned}$$

三、由参数方程所确定的函数的导数

一般地,若由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\phi(t)\end{cases}$$

确定 y 与 x 的函数关系式 $y=y(x)$(或 $x=x(y)$),则称此函数关系所表达的函数为由参数方程所确定的函数.

下面介绍借助于参数 t 求$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的方法(称为参数求导法则).假定函数 $x=\varphi(t)$,$y=\phi(t)$都可导,且 $\varphi'(t)\neq0$.于是根据复合求导法则与反函数导数公式,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\phi'(t)}{\varphi'(t)}$$

例 2-32 求摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$在点 $t=\frac{\pi}{2}$处的切线方程.

解 因为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{\sin t}{1-\cos t}$,所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$$

当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时，$x=a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$，$y=a$，切线方程为

$$y-a=x-a\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

即

$$x-y+a\left(2-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

习题 2-4

1. 求由下列方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $y^2-2xy+9=0$；　　(2) $x^3+y^3-3axy=0$；

(3) $xy=\mathrm{e}^{x+y}$；　　(4) $y=1-x\mathrm{e}^y$.

2. 求下列函数的导数.

(1) $y=x^{2x}$；　　(2) $y=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

3. 求下列参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1) $\begin{cases}x=1-t^2\\ y=t-t^3\end{cases}$；　　(2) $\begin{cases}x=3\mathrm{e}^{-t}\\ y=2\mathrm{e}^t\end{cases}$.

4. 求曲线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ 在点$\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)$处的切线方程和法线方程.

5. 求椭圆$\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases}$ $(a>0,b>0,\theta$ 为参数)在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程与法线方程.

6. 求由下列方程所确定的隐函数的二阶导数.

(1) $x^2-y^2=1$；　　(2) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$；

(3) $y=\tan(x+y)$；　　(4) $y=1+x\mathrm{e}^y$.

第五节　函数的微分

一、微分的定义

计算函数增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 是我们经常要碰到的. 一般来说，函数增量的计算是比较复杂的，我们希望寻求计算函数增量的近似计算方法.

先分析一个具体问题：一块正方形金属薄片受温度变化的影响，其边长由 x_0 变到 $x_0+\Delta x$（图 2-4），那么此薄片的面积改变了多少？

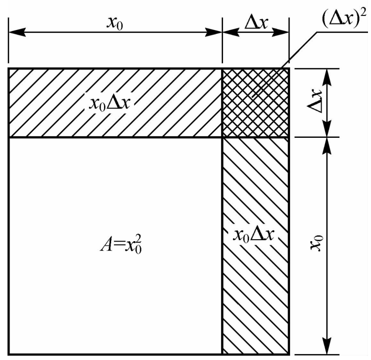

图 2-4

设此薄片的边长为 x，面积为 A，则 A 是 x 的函数：$A=x^2$. 薄片受温度变化影响时，面积的改变量可以看成当自变量 x 自 x_0 取得增量 Δx 时，函数 A 相应的增量 ΔA，即

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2$$

从上式可以看出，ΔA 分成两部分：第一部分 $2x_0\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，即图中带有斜线的两个矩形面积之和；第二部分 $(\Delta x)^2$ 是图中带有交叉斜线的小正方形的面积. 当 $\Delta x\to 0$ 时，第二部分 $(\Delta x)^2$ 是比 Δx 高阶的无穷小，即 $(\Delta x)^2=o(\Delta x)$. 由此可见，如果边长改变很微小，即 $|\Delta x|$ 很小，则面积的改变量 ΔA 可近似地用第一部分来代替.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 满足一定条件，则函数的增量 Δy 可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中，A 是不依赖于 Δx 的常数，因此 $A\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，且它与 Δy 之差

$$\Delta y-A\Delta x=o(\Delta x)$$

是比 Δx 高阶的无穷小. 所以，当 $A\neq 0$ 且 $|\Delta x|$ 很小时，我们就可近似地用 $A\Delta x$ 来代替 Δy.

定义 2-2 设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，$x_0+\Delta x$ 及 x_0 在这个区间内，如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中，A 是不依赖于 Δx 的常数，而 $o(\Delta x)$ 是比 Δx 高阶的无穷小，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处是可微的，而 $A\Delta x$ 叫作函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即 $\mathrm{d}y=A\Delta x$.

下面讨论函数可微的条件.

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微，则按定义有 $\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$ 成立，上式两边同除以 Δx，得

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

于是，当 $\Delta x\to 0$ 时，由上式就可得到

$$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=f'(x_0)$$

因此，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，则 $f(x)$ 在点 x_0 处也一定可导，且 $A=f'(x_0)$.

反之，如果 $y=f(x)$在点 x_0 处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

存在，根据极限与无穷小的关系，上式可写成

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

其中，$\alpha\to 0$(当 $\Delta x\to 0$ 时). 因此又有

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

因 $\alpha\Delta x=o(\Delta x)$，所以 $f(x)$在点 x_0 处也是可微的.

由此可见，函数 $f(x)$在点 x_0 处可微的充要条件是函数 $f(x)$在点 x_0 处可导，且当 $f(x)$在点 x_0 处可微时，其微分一定是

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{f'(x_0)\Delta x}=\frac{1}{f'(x_0)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$$

从而，当 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 是等价无穷小，这时有

$$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\mathrm{d}y)$$

即 $\mathrm{d}y$ 是 Δy 的主部. 又由于 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 是 Δx 的线性函数，所以在 $f'(x_0)\neq 0$ 的条件下，我们说 $\mathrm{d}y$ 是 Δy 的线性主部(当 $\Delta x\to 0$ 时). 这时由式 $\Delta y=\mathrm{d}y+o(\mathrm{d}y)$有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=0$$

从而也有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}\right|=0$$

式子 $\left|\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}\right|$ 表示以 $\mathrm{d}y$ 近似代替 Δy 时的相对误差，于是我们得到结论：在 $f'(x_0)\neq 0$ 的条件下，以微分 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$ 近似代替增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$时，相对误差当 $\Delta x\to 0$ 时趋于零. 因此，当 $|\Delta x|$ 很小时，有精确度较好的近似等式

$$\Delta y\approx \mathrm{d}y$$

函数 $y=f(x)$在任意点 x 处的微分，称为函数的微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$$

例 2-33 求函数 $y=x^3$ 当 $x=2$，$\Delta x=0.02$ 时的微分.

解 因为 $\mathrm{d}y=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x$，所以

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=0.24$$

若设函数 $y=x$，则在任一点 x 处的微分为

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}x=1\cdot\Delta x=\Delta x$$

通常，我们把自变量 x 的增量 Δx 称为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$，所以在微分公式 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 中将 Δx 换成 $\mathrm{d}x$，于是有

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$

在上式两端用 $\mathrm{d}x$ 去除，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)$$

即函数的微分 $\mathrm{d}y$ 与自变量的微分 $\mathrm{d}x$ 的商等于该函数的导数,因此导数也叫作“微商”.

函数在一点处的微分是函数增量的近似值,它与函数增量仅相差 Δx 的高阶无穷小,因此有下面两个近似计算的公式:

$$\Delta y\approx \mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x$$

$$f'(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

二、微分的几何意义

为了对微分有比较直观的了解,我们现在来说明一下微分的几何意义.

在直角坐标系中,函数 $y=f(x)$ 的图形是一条曲线. 对于某一固定的 x_0 值,曲线上有一个确定点 $M(x_0,y_0)$,当自变量 x 有微小增量 Δx 时,就得到曲线上另一点 $N(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$. 从图 2-5 可知

$$MQ=\Delta x,QN=\Delta y$$

过 M 点作曲线的切线,它的倾角为 α,则

$$QP=MQ\tan\alpha=\Delta x f'(x_0)$$

即

$$\mathrm{d}y=QP$$

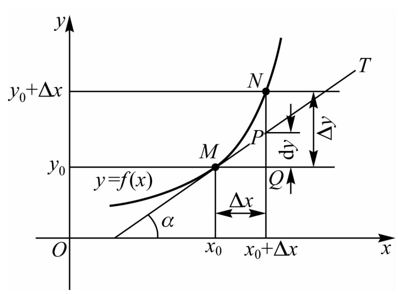

图 2-5

由此可见,当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上的 M 点的纵坐标的增量时,$\mathrm{d}y$ 就是曲线的切线上 M 点的纵坐标的相应增量. 当 $|\Delta x|$ 很小时,$|\Delta y-\mathrm{d}y|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多. 因此,在点 M 的邻近处,可以用切线段来近似代替曲线段.

三、基本初等函数微分公式

由微分表达式及基本初等函数的导数公式,可以直接写出基本初等函数的微分式,具体如下:

(1)$\mathrm{d}(C)=0$; (2)$\mathrm{d}(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$;

(3)$\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$; (4)$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;

(5)$\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$; (6)$\mathrm{d}(\ln x)=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$;

(7)$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$; (8)$\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$;

(9) $d(\tan x)=\sec^2 x dx$;　　(10) $d(\cot x)=-\csc^2 x dx$;

(11) $d(\sec x)=\sec x\tan x dx$;　　(12) $d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$;

(13) $d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;　　(14) $d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(15) $d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$;　　(16) $d(\text{arccot}\, x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$.

四、微分的四则运算法则

定理 2-5　设函数 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是可微函数，C 为常数，则

(1) 函数 $u(x)\pm v(x)$ 也可微，且 $d(u\pm v)=du\pm dv$.

(2) 函数 $u(x)v(x)$ 也可微，且 $d(uv)=vdu+vdv$. 特别地，当 $v(x)=C$ 时，$d(Cu)=Cdu$.

(3) 函数 $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ 也可微，且 $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$，$v(x)\neq 0$.

证明　由函数微分表达式有

$$d(u+v)=(u+v)'dx$$

再根据求和法则有

$$(u+v)'=u'+v'$$

$$d(u+v)=(u'+v')dx=u'dx+v'dx$$

又因　$$u'dx=du, v'dx=dv$$

故　$$d(u+v)=du+dv$$

同理可证其他.

例 2-34　设 $y=x^4+5x^3+x-1$，求 dy.

解　$dy=f'(x)dx=(4x^3+15x^2+1)dx$.

例 2-35　设 $y=\ln(x+e^{x^2})$，求 dy.

解　因为 $y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$，所以 $dy=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx$.

例 2-36　设 $y=e^{1-3x}\cos x$，求 dy.

解　$dy=\cos x d(e^{1-3x})+e^{1-3x}d(\cos x)$.

因为 $(e^{1-3x})'=-3e^{1-3x}$，$(\cos x)'=-\sin x$，所以

$$dy=\cos x(-3e^{1-3x})dx+e^{1-3x}(-\sin x)dx=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx$$

五、复合函数的微分法则

与复合函数求导法则相应的复合函数微分法则推导如下：

设 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 都可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$dy=y'_x dx=f'(u)\varphi'(x)dx$$

由于 $\varphi'(x)dx=du$，所以，复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分公式也可以写成

$$dy=f'(u)du \text{ 或 } dy=y'_u du$$

所以，无论 u 是自变量还是另一个变量的可微函数，微分形式 $dy=f'(u)du$ 均保持不变. 这一性质称为微分形式不变性. 这个性质表明，当变换自变量(设 u 为另一变量的任一可

微函数)时,微分形式 $dy=f'(u)du$ 并不改变.

例 2-37 设 $y=\sin(2x+1)$,求 dy.

解 因为 $y=\sin u, u=2x+1$,所以

$$dy=\cos u du=\cos(2x+1)d(2x+1)=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx$$

例 2-38 求 $y=\sin(3x+1)$的微分 dy.

解 $$dy=[\sin(3x+1)]'dx=\cos(3x+1)\cdot 3dx=3\cos(3x+1)dx$$

例 2-39 求 $y=\dfrac{e^{2x}}{x}$的微分 dy.

解
$$dy=d\left(\frac{e^{2x}}{x}\right)=\frac{xd(e^{2x})-e^{2x}d(x)}{x^2}$$
$$=\frac{xe^{2x}d(2x)-e^{2x}dx}{x^2}=\frac{(2x-1)e^{2x}}{x^2}dx$$

例 2-40 证明参数式函数的求导公式$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

证明 设参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$确定函数 $y=y(x)$,而 $\varphi(t),\psi(t)$可导,且 $\varphi'(t)\neq 0$. 由微分表达式及微分形式不变性,有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

六、微分的应用

由于当 $f'(x_0)\neq 0$ 时,函数 $y=f(x)$的微分 dy 是增量 Δy 的线性主部,且相差的是比 Δx 高阶的无穷小 $o(\Delta x)$,所以当$|\Delta x|$较小时,有

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx dy$$

或

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

利用式 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx dy$ 可以估算函数 $y=f(x)$的增量 Δy;利用式 $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ 可以通过 $f(x_0)$和 $f'(x_0)$来计算函数值 $f(x_0+\Delta x)$.

例 2-41 有一批半径为 1 cm 的球,为了增加球面的光洁度,要镀上一层铜,铜的厚度定为 0.01 cm,估计每只球需用铜多少克(铜的密度为 8.9 g/cm³)?

解 已知球体体积为 $V=\frac{4}{3}\pi R^3$,镀铜体积为 V,当 $R=1,\Delta R=0.01$ 时体积的增量为

$$\Delta V\approx dV\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}}=4\pi R^2\Delta R\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}}\approx 0.126\ \text{cm}^3$$

因此,每只球需用铜为

$$8.9\times 0.126\approx 1.12\ \text{g}$$

例 2-42 计算 $\cos 60°30'$的近似值.

解 设 $f(x)=\cos x$,故 $f'(x)=-\sin x$(x 为弧度). 因为 $x_0=\frac{\pi}{3},\Delta x=\frac{\pi}{360}$,所以

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}, f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故

$$\cos 60°30'=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360}\right)\approx\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0.4924.$$

下面推导一些常用的近似公式. 在 $dy=f'(x_0)\Delta x$ 中取 $x_0=0$，则当$|x|$很小时，有

$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x$$

利用上式可以推得在工程中常用的近似计算公式有

$$\sqrt[n]{1+x}\approx 1+\frac{1}{n}x;\ \sin x\approx x;\ \tan x\approx x;\ e^x\approx 1+x;\ \ln(1+x)\approx x$$

例 2-43 证明下列近似式.

(1) $e^x\approx 1+x$；(2) $\ln(1+x)\approx x$.

证明 (1)令 $f(x)=e^x$，则 $f'(x)=e^x$，当 $x=0$ 时，$f(0)=e^0=1$，$f'(0)=e^0=1$，由 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$ 推得 $f(x)\approx 1+x$，即 $e^x\approx 1+x$.

(2)令 $f(x)=\ln(1+x)$，则 $f'(x)=\frac{1}{1+x}$，当 $x=0$ 时，$f(0)=0$，$f'(0)=1$，由 $f(x)\approx f(0)+f'(0)x$推得 $f(x)\approx x$，即 $\ln(1+x)\approx x$.

习题 2-5

1. 求下列各函数在给定条件下的增量和微分.

(1) $y=2x+1$，x 由 2 变到 1.99；

(2) $y=x^2+2x+3$，x 由 0 变到 0.01.

2. 求下列函数的微分.

(1) $y=\frac{1}{x}+2\sqrt{x}$；　　(2) $y=x\sin 2x$；

(3) $y=\ln\sqrt{x^2-1}$；　　(4) $y=x^2e^{3x}$.

3. 将适当的函数填入括号内，使等式成立.

(1) d(　　) $=2x\mathrm{d}x$；　　(2) d(　　) $=\cos x\,\mathrm{d}x$；

(3) d(　　) $=e^{-2x}\mathrm{d}x$；　　(4) d(　　) $=\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x$.

4. 计算下列各式的近似值(精确到 0.000 1).

(1) $\sqrt[3]{1.02}$；　　(2) $\ln 0.98$；　　(3) $\sin 0.5°$；　　(4) $e^{1.01}$.

5. 设水管壁的横截面形状是圆环，其内径为 120 mm，壁厚为 3 mm，利用微分求圆环面积的近似值(精确到 1 mm^3).

6. 边长为 20 cm 的金属立方体受热膨胀，当边长增加 2 mm 时，求立方体所增加的体积的近似值(精确到 1 cm^3).

复习题

一、单选题

1. 若(　　)式所示的极限存在，则称 $f(x)$在点 $x=0$ 处的导数存在.

A. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}$　　B. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}$

C. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{-\Delta x}$

D. $\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(-\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$

2. 函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 处(　　).

A. 连续且可导

B. 不可导

C. 不连续

D. 连续但不可导

3. 函数在点 x_0 处的左、右导数均存在是函数在点 x_0 处导数存在的(　　)条件.

A. 充分

B. 必要

C. 充要

D. 既不充分又不必要

4. 设 $f(x)-f(x_0)=A\Delta x+\alpha$($A$ 与 Δx 无关),当 α 是(　　)时,函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微.

A. 无穷小

B. 关于 Δx 的无穷小

C. 关于 Δx 的同阶无穷小

D. 关于 Δx 的高阶无穷小

5. 已知 $y=e^{f(x)}$,则 $y''=$(　　).

A. $e^{f(x)}$

B. $e^{f(x)}f'(x)$

C. $e^{f(x)}[f'(x)+f''(x)]$

D. $e^{f(x)}\{[f'(x)]^2+f''(x)\}$

6. 若 $f(u)$ 可导,且 $y=f(e^x)$,则有(　　).

A. $dy=f'(e^x)dx$

B. $dy=f'(e^x)e^x dx$

C. $dy=f(e^x)e^x dx$

D. $dy=[f(e^x)]'e^x dx$

7. 若函数 $f(x)$ 是可微函数,则当 $\Delta x\to 0$ 时,在点 x 处的 $\Delta y-dy$ 是关于 Δx 的(　　).

A. 高阶无穷小

B. 等价无穷小

C. 低阶无穷小

D. 无法确定

8. 设 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$,则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的(　　)条件.

A. 充分

B. 必要

C. 充要

D. 既不充分又不必要

二、填空题

1. 设 $f'(x_0)$ 存在,则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=$________.

2. 已知 $y=\sqrt{x^2}$,则 $f'_-(0)=$________,$f'_+(0)=$________.

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=$________.

4. 设 $f(x)=\ln x^3+e^{3x}$,则 $f'(1)=$________.

5. 方程式 $e^y+xy=e$ 确定 y 是 x 的函数,则导数值 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{(0,1)}=$________.

6. 设 $\begin{cases} x=t^3+t-1 \\ y=3-2t^2 \end{cases}$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}=$________.

三、计算题

1. 求下列函数的导数$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(1)$y=\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)\sqrt{x}$；　(2)$y=\frac{x^2}{\ln x}$；　(3)$y=(x\sqrt{x}+3)\mathrm{e}^{2x}$；

(4)$y=\sqrt{1+\ln^2 x}$；　(5)$2y-x=\sin y$；　(6)$\begin{cases}x=a\cos^2 t\\ y=a\sin t\end{cases}$.

2. 求下列函数的微分 $\mathrm{d}y$.

(1)$y=\cos^2 x^2$；　(2)$y=\ln(\sqrt{x^2+a^2}-x)$；

(3)$y=(1+x^2)\arctan x$；　(4)$y=x+\ln y$.

3. 求曲线$\begin{cases}x=2\mathrm{e}^t\\ y=\mathrm{e}^{-t}\end{cases}$在点 $t=0$ 处的切线方程与法线方程.

四、证明题

1. 已知 $y=\mathrm{e}^x\sin x$，求证：$y''-2y'+2y=0$.
2. 如果 $f(x)$为偶函数，且 $f'(0)$存在，证明 $f'(0)=0$.
3. 证明：双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的三角形的面积都等于 $2a^2$.