第二章

随机变量及其分布

一、内容提要

在本章中，引入了随机变量及其分布的概念，随机试验所产生的任意事件都可以通过随机变量的取值表达出来，而随机事件的概率则可利用随机变量的概率分布求出.

对于任意的一个随机变量，都可以通过分布函数 $F(x)$ 这一概念来描述它的概率分布，利用分布函数可以求得随机变量所产生事件的概率. 分布函数具有规范性、单调非降性、右连续性等性质.

在本章中讨论了两类重要的随机变量：离散型随机变量和连续型随机变量.

对于离散型随机变量，需要知道它可能取哪些值，以及取每个可能值时的概率，常用分布列来描述. 离散型随机变量所产生事件的概率等于该事件所含随机变量取值对应概率之和. 离散型随机变量的分布函数和分布列是相互确定的.

对于非离散型随机变量中的一类重要的随机变量——连续型随机变量，引入了概率密度函数 $f(x)$ 来刻画它的分布. 连续型随机变量所产生事件的概率等于其密度函数在该事件所在区域上的积分. 连续型随机变量的概率密度函数和分布函数是相互确定的，并且连续型随机变量的分布函数为连续函数.

在本章中还介绍了概率中常见的一些分布——(0－1)分布、二项分布、泊松分布、几何分布、正态分布、均匀分布及指数分布.

随机变量 X 的函数 $Y=g(X)$ 也是一个随机变量，称为随机变量 X 的函数，在本章最后一节介绍了如何利用 X 的分布（分布列或密度函数）求出函数 $Y=g(X)$ 的分布.

二、目的及要求

（1）理解随机变量及其概率分布的概念.

（2）理解随机变量分布函数的概念及性质，掌握分布函数的性质，会利用分布函数求随机变量事件的概率.

（3）理解离散型随机变量的分布列及其性质，熟练掌握（0－1）分布、二项分布、泊松分布、几何分布及其应用.

（4）理解连续型随机变量及其概率密度函数的概念，掌握密度函数的性质，会应用密度函数有关事件的概率及分布函数；掌握正态分布、均匀分布和指数分布及其应用.

（5）掌握求解随机变量函数的概率分布的方法.

三、重点与难点

1. 重点

（1）随机变量的概念.

（2）随机变量分布函数的概念、性质及求法.

（3）连续型随机变量的密度函数及其性质.

（4）常见分布.

（5）随机变量函数分布的求法.

2. 难点

（1）随机变量分布函数的概念及求法.

（2）随机变量函数分布的求法.

四、重要公式

（1）分布函数. 对任意的随机变量 X，分布函数为

$$F(x)=P(X\leqslant x),-\infty<x<+\infty.$$

对任意 $a<b$,有

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a).$$

(2)离散型随机变量 X 的分布列为 $P(X=x_i)=p_i,i=1,2,\cdots$,则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}p_i=1$,且 X 的取值落入任意一个集合 A 的概率为

$$P(X\in A)=\sum_{x_i\in A}P(X=x_i).$$

(3)连续型随机变量 X 的密度函数为 $f(x)$,则

①分布函数 $F(x)=P(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t$;

② $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$;

③对任意的实数 a、$b(a<b)$,有 $P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

(4)已知连续型随机变量 X 的密度函数为 $f_X(x)$,函数 $y=g(x)$满足

①$P(a<X<b)=1(-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty)$;

②函数 $g(x)$是(a,b)上严格单调的连续函数;

③反函数 $x=g^{-1}(y)$有连续导数,

则 $Y=g(X)$的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[g^{-1}(y)]\,|[g^{-1}(y)]'|, & \alpha<y<\beta,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\alpha=\min\{g(a),g(b)\}$,$\beta=\max\{g(a),g(b)\}$.

五、习题解答

(1)一口袋中装有6个形状相同的球,分别标号为1、2、3、4、5、6,现从袋中任取3个,设 X 是取出球的最小号码,写出随机变量 X 的分布列,并求 $P(X\geqslant3)$.

【解】 由题意知,X 的分布列为

$$P(X=i)=\frac{C_{6-i}^{2}}{C_6^3},i=1,2,3,4.$$

而 $P(X\geqslant3)=P(X=3)+P(X=4)$,故

$$P(X\geqslant 3)=\frac{C_3^2}{C_6^3}+\frac{C_2^2}{C_6^3}=\frac{4}{20}=0.2.$$

(2)设随机变量 X 的分布列为 $P(X=k)=\dfrac{c}{k+1},k=0,1,3,5$,求:

①常数 c;

②$P(X<2)$;

③$P(X<3\mid X\neq 1)$.

【解】 ①由分布列的规范性得

$$\sum_{k=0,1,3,5}P(X=k)=\sum_{k=0,1,3,5}\frac{c}{k+1}=\frac{c}{0+1}+\frac{c}{1+1}+\frac{c}{3+1}+\frac{c}{5+1}=\frac{23}{12}c=1,$$

故 $c=\dfrac{12}{23}$.

②由题意得

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{12}{23}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{18}{23}.$$

③由条件概率得

$$P(X<3\mid X\neq 1)=\frac{P(X<3,X\neq 1)}{P(X\neq 1)},$$

其中

$$P(X\neq 1)=1-P(X=1)=\frac{17}{23};P(X<3,X\neq 1)=P(X=0)=\frac{12}{23},$$

故

$$P(X<3\mid X\neq 1)=\frac{12}{17}.$$

(3)两名射手轮流射击某一目标.第一位射手命中目标的概率为 $1/2$,第二位射手命中目标的概率为 $1/3$.为击中目标共射击了 X 次,求 X 的分布列.

【解】 设事件 A、B 分别表示“第一位命中”和“第二位命中”.由题意知,X 的取值为 $1,2,\cdots$.则

$$P(X=1)=P(A)=\frac{1}{2};$$

$$P(X=2)=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=\frac{1}{6};$$

$$P(X=3)=P(\bar{A}\bar{B}A)=P(\bar{A})P(\bar{B})P(A)=\frac{1}{6};$$

$$P(X=4)=P(\bar{A}\bar{B}\bar{A}B)=P(\bar{A})^2P(\bar{B})P(B)=\frac{1}{18};$$

$$\cdots$$

综上可得,X 的分布列为

$$P(X=2k-1)=[P(\bar{A})]^{k-1}[P(\bar{B})]^{k-1}P(A)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{2\cdot 3^{k-1}};$$

$$P(X=2k)=[P(\bar{A})]^k[P(\bar{B})]^{k-1}P(B)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2\cdot 3^k},$$

其中 $k=1,2,\cdots$.

(4)试确定 a 的值,使下列形式为某个离散型随机变量的分布列:

①$P(X=k)=a\mathrm{e}^{-k+2}(k=0,1,2,\cdots)$;

②$P(X=k)=\dfrac{a}{3^k k!}(k=0,1,2,\cdots)$.

【解】 由分布列的规范性得

①$\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a\mathrm{e}^{-k+2}=a\dfrac{\mathrm{e}^2}{1-\mathrm{e}^{-1}}=a\dfrac{\mathrm{e}^3}{\mathrm{e}-1}=1$,故 $a=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^3}$;

②$\sum\limits_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{a}{3^k k!}=a\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}=1$,故 $a=\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$.

(5)自动生产线在调整之后出现废品的概率为 p,在生产过程中出现废品时立即重新进行调整,求在两次调整之间生产合格品个数 X 的分布列.

【解】 由题意知,X 的分布列为

$$P(X=k)=(1-p)^k p,k=0,1,2,\cdots.$$

(6)甲、乙两人投篮,投中的概率分别为 0.6、0.7,今各投 3 次,求:

①两人投中次数相同的概率;

②甲比乙投中次数多的概率.

【解】 设甲、乙投中的次数分别为随机变量 X、Y,则 $X\sim B(3,0.6)$,$Y\sim B(3,0.7)$,故 $P(X=i)=C_3^i(0.6)^i(0.4)^{3-i}$,$P(Y=i)=C_3^i(0.7)^i(0.3)^{3-i}(i=0,1,2,3)$.

①$P(X=Y)=\sum_{i=0}^{3}P(X=i,Y=i)=\sum_{i=0}^{3}P(X=i)P(Y=i)\approx 0.320\ 8$；

②$P(X>Y)=\sum_{\substack{i=1,2,3\\ j<i}}P(X=i,Y=j)=\sum_{\substack{i=1,2,3\\ j<i}}P(X=i)P(Y=j)\approx 0.243\ 0$.

(7)某公安局在长度为 t(单位为 h)的事件间隔内收到的报警次数 X 服从参数为$\frac{t}{2}$的泊松分布，而与时间间隔起点无关. 求：

①某天 12:00～15:00 没有收到报警的概率；

②某天 12:00～17:00 至少收到 1 次报警的概率.

【解】 ①由题意得 12:00～15:00 收到的报警次数 $X\sim P\left(\frac{3}{2}\right)$，故

$$P(X=0)=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}};$$

②由题意得 12:00～17:00 收到的报警次数 $X\sim P\left(\frac{5}{2}\right)$，故

$$P(X\geqslant 1)=1-P(X=0)=1-\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}}.$$

(8)已知 $X\sim B(5,p)$，并且 $P(X=1)=P(X=2)$，求 $P(X=4)$.

【解】 由于 $X\sim B(5,p)$，故

$$P(X=1)=\mathrm{C}_5^1p(1-p)^4,P(X=2)=\mathrm{C}_5^2p^2(1-p)^3,$$

由题意 $P(X=1)=P(X=2)$，即 $1-p=2p$，解得 $p=\frac{1}{3}$，所以

$$P(X=4)=\mathrm{C}_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{20}{243}.$$

(9)已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=A\mathrm{e}^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，求：

①A 的值；

②$P(0<X<1)$；

③分布函数 $F(x)$.

【解】 ①由密度函数的规范性可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}A\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2A=1,$$

解得 $A=\dfrac{1}{2}$；

②$P(0<X<1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}(1-\mathrm{e}^1)$；

③分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_{-\infty}^x \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^x, & x<0,\\ \int_{-\infty}^0 \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^x \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t=1-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

(10)设随机变量 $X\sim U(2,5)$，现对 X 进行 3 次独立观测，求至少有两次观测值大于 3 的概率.

【解】 根据 X 的分布可知 $P(X>3)=\dfrac{2}{3}$，设 Y 表示 3 次观测中观测值大于 3 的次数，显然 $Y\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$，故所求为

$$P(Y\geqslant 2)=P(Y=2)+P(Y=3)=\frac{20}{27}.$$

(11)设随机变量 $\xi\sim U(1,6)$，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率是多少？

【解】 方程有实根的充要条件为 $\Delta\geqslant 0$，即 $\xi^2-4\geqslant 0$，等价于 $\xi\geqslant 2$，$\xi\leqslant -2$（舍去），故有实根的概率为

$$P(\xi\geqslant 2)=\frac{4}{5}.$$

(12)某电子元件的使用寿命 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x\geqslant 100,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

若 1 台电视上装有 3 个这种元件，求使用最初的 150 h 内 3 个元件都没有发生故障的概率.

【解】 元件在最初的 150 h 内发生故障的概率为

$$P(X\leqslant 150)=\int_{-\infty}^{150} f(x)\mathrm{d}x=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}.$$

设 Y 表示在最初的 150 h 内发生故障的元件个数，则 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{3}\right)$，故在使用最初的 150 h 内 3 个元件都没有发生故障的概率为

$$P(Y=0)=\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{27}.$$

(13)设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}A+Be^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$. 求：

①常数 A、B；

②$P(-1<X<1)$，$P(X\geqslant 3)$；

③概率密度 $f(x)$.

【解】 ①由连续型随机变量分布函数的规范性和连续性得

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=A=1;$$
$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=A+B=F(0)=0,$$

解得 $A=1$，$B=-1$；

② $$P(-1<X<1)=F(1)-F(-1)=1-e^{-\lambda};$$
$$P(X\geqslant 3)=1-F(3)=1-(1-e^{-3\lambda})=e^{-3\lambda}.$$

③根据密度函数与分布函数之间的关系得

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

(14)设成年男子的身高(以 cm 计)$X\sim N(170,6^2)$，某种公共汽车车门的高度是按成年男子碰头的概率在 1%以下来设计的，问车门的高度最少应为多少厘米？

【解】 设车门的高度为 N，则由题意得

$$P(X>N)<0.01,$$

即

$$P(X\leqslant N)=P\left(\frac{X-170}{6}\leqslant\frac{N-170}{6}\right)=\Phi\left(\frac{N-170}{6}\right)>0.99,$$

查附表 2 可得 $\Phi(2.33)=0.990\ 1$，故 $\frac{N-170}{6}\geqslant 2.33$，即 $N\geqslant 183.98$，故车门高度最少为 183.98 cm.

(15)设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 且 $P(X\leqslant -5)=0.045$，$P(X>3)=0.382$，求 μ 和 σ.

【解】 由题意 $P(X\leqslant -5)=0.045$ 即 $\Phi\left(\frac{-5-\mu}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{5+\mu}{\sigma}\right)=0.045$，得

$$\Phi\left(\frac{5+\mu}{\sigma}\right)=0.955;$$

而由 $P(X>3)=0.382$ 即 $1-\Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right)=0.382$，得

$$\Phi\left(\frac{3-\mu}{\sigma}\right)=0.618.$$

查附表 2 可得

$$\begin{cases}\frac{5+\mu}{\sigma}=1.70,\\ \frac{3-\mu}{\sigma}=0.30,\end{cases}$$

解得 $\mu=1.8$，$\sigma=4$.

(16)设车床加工金属圆杆，已知圆杆的直径(以 cm 计)$X\sim N(12.4,\sigma^2)$，规定直径为 12.0～12.8 cm 的概率至少为 0.95，试确定 σ 最大为多少.

【解】 由题意得 $P(12.0<X<12.8)\geqslant 0.95$，即

$$\Phi\left(\frac{12.8-12.4}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{12.0-12.4}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{0.4}{\sigma}\right)-1\geqslant 0.95,$$

所以 $\Phi\left(\frac{0.4}{\sigma}\right)\geqslant 0.975$，查附表 2 得 $\Phi(1.96)=0.975$，故可得 $\sigma\approx 1.204\ 1$.

(17)设随机变量 X 的分布列为

X	-2	-1	0	1	2
p	0.15	0.32	0.24	0.11	0.18

求：

①$Y=2X+1$；

②$Y=|X|-1$ 的分布列.

【解】 ①$Y=2X+1$ 的分布列为

$Y=2X+1$	-3	-1	1	3	5
p	0.15	0.32	0.24	0.11	0.18

②对于函数 $Y=|X|-1$ 可得

$Y=\|X\|-1$	1	0	-1	0	1
p	0.15	0.32	0.24	0.11	0.18

故 $Y=|X|-1$ 的分布列为

$Y=\|X\|-1$	1	0	-1
p	0.33	0.43	0.24

(18)一食品厂一天的产量 X(以 t 计)的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

一天的产值是 $Y=5X+1$(以千元计),求 Y 的概率密度.

【解】 由于函数 $Y=5X+1$ 具有单调性,所以可利用定理 2.5 中的公式计算,其中

$$x=g^{-1}(y)=\frac{y-1}{5},[g^{-1}(y)]'=\frac{1}{5},$$

所以 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[g^{-1}(y)]\,|[g^{-1}(y)]'|=\dfrac{2(y-1)}{25}, & 1<y<6,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(19)设随机变量 X 服从(0,9)上的均匀分布,随机变量 Y 是 X 的函数:

$$Y=\begin{cases}-1, & X<1,\\ 1, & X=1,\\ 2, & 1<X\leqslant 6,\\ 3, & 6<X\leqslant 9,\end{cases}$$

求 Y 的分布列.

【解】 由题意可得 Y 的分布列为

$$P(Y=-1)=P(X<1)=\frac{1}{9};$$

$$P(Y=1)=P(X=1)=0;$$

$$P(Y=2)=P(1<X\leqslant 6)=\frac{5}{9};$$

$$P(Y=3)=P(6<X\leqslant 9)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

(20)一台电话总机共有 225 部分机,每部分机呼叫外线的概率为 0.02.

①若设置 12 条外线,则每部分机呼叫外线失败的概率是多少?

②这台总机需要设置多少外线,才能保证每部分机呼叫外线失败的概率低于 0.01.

【解】 设 X 表示"同时呼叫外线的分机数",则 $X\sim B(225,0.02)$,由泊松逼近可知 X 近似服从 $P(4.5)$.

①当呼叫外线的分机数 X 大于设置的外线数时会出现呼叫失败,所以呼叫失败的概率为

$$P(X>12)=P(X\geqslant 13).$$

查附表 1 可得呼叫失败的概率为 0.000 805.

②设置 N 条外线,由题意得

$$P(X>N)=P(X\geqslant N+1)<0.01.$$

查附表 1 可得 $N+1\geqslant 11$,故当设置 10 条外线时,才能保证每部分机呼叫外线失败的概率低于 0.01.

(21)设随机变量 $X\sim U(-1,1)$.求下列函数的概率密度:

①$Y=(X+1)^2$;

②$Z=\ln(X+1)$；

③$T=2X^2+1$.

【解】 X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

①函数 $Y=(X+1)^2$ 在$(-1,1)$上单调，故可利用定理 2.5 中的公式进行计算，其中

$$x=g^{-1}(y)=\sqrt{y}-1,[g^{-1}(y)]'=\frac{1}{2\sqrt{y}},$$

故 $Y=(X+1)^2$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[g^{-1}(y)]\,|[g^{-1}(y)]'|=\dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

②函数 $Z=\ln(X+1)$在$(-1,1)$上单调，故可利用定理 2.5 中的公式进行计算，其中

$$x=g^{-1}(z)=\mathrm{e}^z-1,[g^{-1}(z)]'=\mathrm{e}^z.$$

故 $Z=\ln(X+1)$的密度函数为

$$f_Z(z)=\begin{cases}f_X[g^{-1}(z)]\,|[g^{-1}(z)]'|=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^z, & -\infty<y<\ln 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

③函数 $T=2X^2+1$ 在$(-1,1)$上不单调，故要用分布函数法. 由题意知 T 的取值范围为$(1,3)$，故当 $t\leqslant 1$ 时，T 的分布函数 $F_T(t)=0$；当 $t\geqslant 3$ 时，$F_T(t)=1$；当 $1<t<3$ 时，

$$F_T(t)=P(T\leqslant t)=P(2X^2+1\leqslant t)=P\left(-\sqrt{\frac{t-1}{2}}\leqslant X\leqslant\sqrt{\frac{t-1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{t-1}{2}}.$$

所以 $T=2X^2+1$ 的密度函数为

$$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2(t-1)}}, & 1<t<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(22)设随机变量 $X\sim E(\lambda)$,其分布函数为 $F(x)$.求随机变量 $Y=F(x)$的概率密度函数.

【解】 由题意得 X 的密度函数和分布函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然非零表达式为单调函数,故可用定理 2.5 中的公式进行计算,其中

$$x=F^{-1}(y)=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y),[F^{-1}(y)]'=\frac{1}{\lambda(1-y)},$$

所以,随机变量 $Y=F(x)$的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[F^{-1}(y)]\,|[F^{-1}(y)]'|=1, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

显然 $Y=F(x)$服从(0,1)上的均匀分布.

(23)设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\pi^2}, & 0<x<\pi,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

【解】 根据题意知 $Y=\sin X$ 的取值范围为(0,1),所以当 $y\leqslant 0$ 时,分布函数 $F(x)=0$;当 $y\geqslant 1$ 时,分布函数 $F(x)=1$;当 $0<y<1$ 时,分布函数

$$\begin{aligned}F(x)&=P(Y\leqslant y)=P(\sin X\leqslant y)\\&=P(0<X\leqslant \arcsin y)+P(\pi-\arcsin y\leqslant X<\pi)\\&=\frac{(\arcsin y)^2}{\pi^2}+1-\frac{(\pi-\arcsin y)^2}{\pi^2},\end{aligned}$$

所以,$Y=\sin X$ 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{2\arcsin y}{\pi^2\sqrt{1-y^2}}+\dfrac{2(\pi-\arcsin y)}{\pi^2\sqrt{1-y^2}}, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$