第一章

函数、极限与连续

初等数学所研究的对象主要是常量，而高等数学研究的基本对象是定义在实数集上的函数，并且以极限方法作为基本的研究方法. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为今后的学习打下必要的基础.

第一节　函　　数

在现实世界中，一切事物都在一定的空间中运动着. 17 世纪初，数学首先从对运动（如天文、航海等问题）的研究中引出了函数这个基本概念. 在那以后的 200 多年里，这个概念几乎在所有的科学研究工作中都占据了中心位置.

一、区间与邻域

区间是一种常见的数集. 设 a,b 是两个实数，且 $a<b$，则

称数集 $\{x \mid a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 (a,b)；

称数集 $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ 为**闭区间**，记为 $[a,b]$；

称数集 $\{x \mid a \leqslant x<b\}$ 和 $\{x \mid a<x \leqslant b\}$ 为**半开区间**，分别记为 $[a,b)$ 和 $(a,b]$.

以上几个区间统称为**有限区间**，a,b 分别称为区间的**左端点**和**右端点**，$b-a$ 称为**区间的长度**.

此外，还可以定义如下五种类型的无限区间：

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\};[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\};$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\};(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R},$$

这里 $+\infty$ 和 $-\infty$ 是记号,不是数,分别读作“正无穷大”和“负无穷大”.

有限区间和无限区间统称为**区间**.

邻域也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的开区间 $(a-\delta, a+\delta)(\delta > 0)$ 称为点 a 的 **δ 邻域**,记为 $U(a,\delta)$,其中点 a 称为该邻域的**中心**,δ 称为该邻域的**半径**.

显然,$U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的点的集合,即

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}.$$

当无需强调邻域的半径时,常用记号 $U(a)$ 表示以点 a 为中心的某个邻域.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$,即

$$\mathring{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

另外,开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的**左 δ 邻域**,而开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的**右 δ 邻域**.

二、函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型.

在某一自然现象或社会现象中,往往存在多个不断变化的量,即变量,这些变量并不是孤立变化的,而是相互联系并遵循一定的规律. 函数就是用来描述这种联系的. 下面先讨论两个变量的情形(多于两个变量的情形将在第九章中讨论).

例如,在自由落体运动中,设物体下落的时间为 t,下落的距离为 s,假定开始下落的时刻 $t=0$,则变量 s 与 t 之间的相依关系由数学模型

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

给定,其中 g 是重力加速度.

定义 1 设 x 和 y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集. 若对于每个 $x \in D$,变量 y 按照一定法则 f 总有确定的数值与它对应,则称 y 是 x 的**函数**,记为

$$y = f(x), x \in D,$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,数集 D 称为这个函数的**定义域**,也记为 D_f,即 $D_f = D$.

对每个 $x \in D$,按照对应法则 f,总有确定的值 y 与之对应,这个值称为函数在点 x 处的**函数值**,记为 $f(x)$. 因变量与自变量的这种相依关系通常称为**函数关系**.

当自变量 x 遍取 D 的所有数值时,对应的函数值 $f(x)$ 的全体构成的集合称为函数 f 的**值域**,记为 R_f 或 $f(D)$,即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

由函数的定义可以看出，函数的定义域与对应法则是确定函数的两个必不可少的要素. 也就是说，如果两个函数的对应法则和定义域都相同，那么这两个函数就是相同的函数.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义确定. 若讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义域，这种定义域又称为函数的**自然定义域**.

例如，函数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的(自然)定义域为开区间$(-1,1)$.

对函数 $y = f(x)(x \in D)$，若取自变量 x 为横坐标，因变量 y 为纵坐标，则在平面直角坐标系 xOy 中就确定了一个点(x,y). 当 x 遍取定义域 D 中的每一个数值时，平面上的点集

$$C = \{(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y = f(x)$ 的**图形**(见图 1-1).

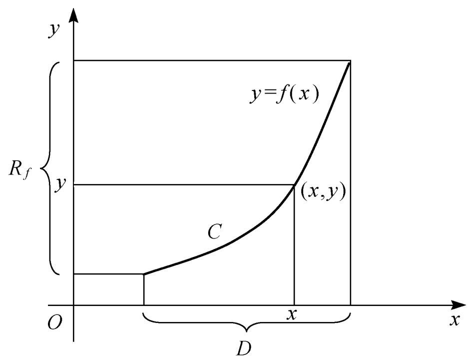

图 1-1

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是唯一的，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 在闭区间$[-a,a]$上确定了一个以 x 为自变量、y 为因变量的函数. 对每一个 $x \in (-a,a)$，都有两个 y 值$(\pm\sqrt{a^2-x^2})$与之对应，因而 y 是多值函数.

注：若无特别声明，函数均指单值函数.

函数的常用表示法有以下三种：

(1) **表格法**　将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图形法**　在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) **公式法(解析法)** 将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法.

例 1 绝对值函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x<0, \end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$,它的图形如图 1-2 所示.

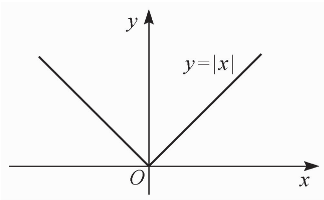

图 1-2

例 2 符号函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0, \end{cases}$ 其定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$.对任一实数 x,总有 $x=\operatorname{sgn} x \cdot |x|$,它的图形如图 1-3 所示.

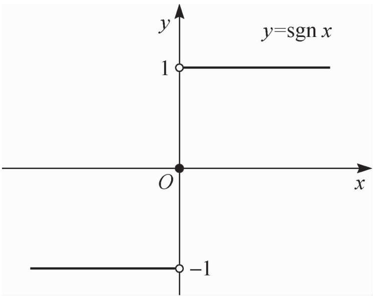

图 1-3

有些函数,对于自变量的不同取值范围,有不同的对应法则,这种函数称为**分段函数**,如例 1 和例 2 中的两个函数.

例 3 取整函数 $y=[x]$,表示不超过数 x 的最大整数.例如,

$$[2.3]=2,[5]=5,[\pi]=3,[-6.7]=-7.$$

取整函数的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots\}$,它的图形如图 1-4 所示.

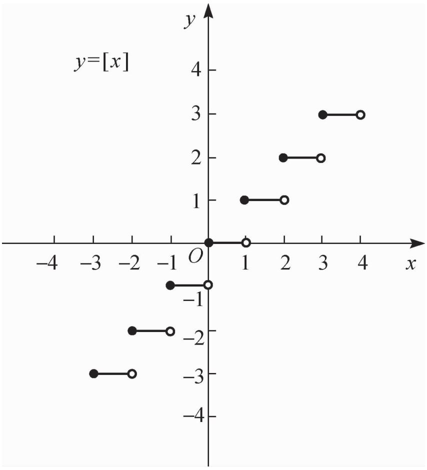

图 1-4

三、函数的特性

1. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subset D$. 若存在一个正数 M，使得对任一 $x \in X$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上**有界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**有界函数**. 每一个满足上述不等式的正数 M 都是该函数的界.

若不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 X 上**无界**，或称 $f(x)$ 是 X 上的**无界函数**.

例如，函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界，因为对任何实数 x，恒有 $|\sin x| \leqslant 1$. 又如，函数 $y = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上无界，在 $[1, +\infty)$ 上有界.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I \subset D$. 若对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数在区间 I 上是**单调增加函数**；若对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少函数**.

3. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.若对于任一 $x \in D$,恒有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**;若对于任一 $x \in D$,恒有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如,$f(x) = x^2$ 是$(-\infty, +\infty)$上的偶函数,因为 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$;$f(x) = x^3$ 是$(-\infty, +\infty)$上的奇函数,因为 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在常数 $T > 0$,使得对于任一 $x \in D$,有$(x \pm T) \in D$,且

$$f(x \pm T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 称为 $f(x)$ 的**周期**.通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

例如,$\sin x$,$\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数;函数 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

周期函数的图形特点是,若把一个周期为 T 的周期函数在一个周期内的图形向左或向右平移周期的正整数倍距离,则它将与周期函数的其他部分图形重合(见图 1-5).

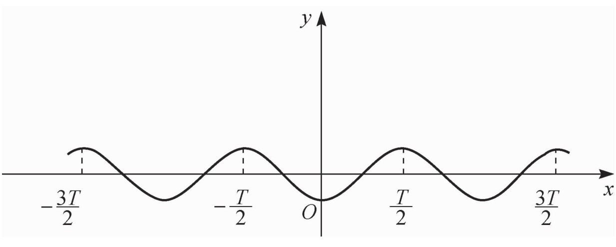

图 1-5

周期函数的应用是广泛的,因为在科学与工程技术中研究的许多现象都呈现出明显的周期性特征,如家用的电压和电流是周期的,用于加热食物的微波炉中的电磁场是周期的,季节和气候是周期的,月相和行星的运动是周期的,等等.

四、反函数与复合函数

1. 反函数

函数关系的实质就是从定量分析的角度来描述运动过程中变量之间的相互依赖关系. 但在研究过程中，哪个量作为自变量，哪个量作为因变量（函数）是由具体问题决定的.

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 R_f. 对于值域 R_f 中的任一数值 y，都有唯一确定的 $x\in D$ 与之对应，且满足关系式

$$f(x)=y,$$

则确定了一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数，称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记为 $x=f^{-1}(y)$. 反函数的定义域为 R_f，值域为 D. 相对于反函数，函数 $y=f(x)$ 称为**直接函数**.

由于习惯上用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，因此将反函数中 x 与 y 互换位置，即记为 $y=f^{-1}(x)$，$x\in R_f$.

在同一直角坐标系中，函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

什么样的函数才有反函数呢?下面给出反函数存在定理.

定理　设函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（或减少），则函数 $y=f(x)$ 存在反函数，其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在对应区间 $I_y=\{y\,|\,y=f(x),x\in I_x\}$ 也单调增加（或减少）.

注：单调性并不是一个函数存在反函数的必要条件，读者可自己举出非单调函数存在反函数的实例.

例 4　求函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数.

解　记 $u=e^x$，则 $y=\dfrac{u-u^{-1}}{2}$，由此得 $u^2-2yu-1=0$，解得

$$u=y\pm\sqrt{y^2+1},$$

因 $u>0$，故

$$u=y+\sqrt{y^2+1}，即\ e^x=y+\sqrt{y^2+1},$$

所以 $x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$，因此函数 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数为

$$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

2. 复合函数

定义 3 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ,若 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的**复合函数**,其中 x 称为自变量,y 称为因变量,u 称为**中间变量**.

注:(1) 不是任何两个函数都可以构成复合函数.例如,函数 $y=\arcsin u$ 和函数 $u=2+x^2$ 就不能构成复合函数.因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域为$[-1,1]$,而 $u=2+x^2 \geqslant 2$,所以对任何的 x 值,y 都得不到确定的对应值.

(2) 复合函数可以有多个中间变量,如 $y=\mathrm{e}^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x+1$ 复合成函数 $y=\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}$,这里 u,v 都是中间变量.

例 5 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}2-x^2, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1,\end{cases}$ 求 $f[g(x)]$,$g[f(x)]$.

解 $f[g(x)]=\begin{cases}1, & |g(x)|\leqslant 1,\\ 0, & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|=1,\\ 0, & |x|\neq 1.\end{cases}$

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-[f(x)]^2, & |f(x)|\leqslant 1,\\ 2, & |f(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 2, & |x|>1.\end{cases}$$

利用复合函数不仅能将若干个简单的函数复合成一个函数,还可以把一个较复杂的函数分解成几个简单的函数,这对于今后掌握微积分的运算是很重要的.

例 6 下列函数是由哪些较简单的函数复合而成的:

(1) $y=\mathrm{e}^{-x}$; (2) $y=\sin^2(1+2x)$; (3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$.

解 (1) $y=\mathrm{e}^{-x}$ 由 $y=\mathrm{e}^u$,$u=-x$ 复合而成.

(2) $y=\sin^2(1+2x)$ 由 $y=u^2$,$u=\sin v$,$v=1+2x$ 复合而成.

(3) $y=\arccos\sqrt{\tan(a^2+x^2)}$ 由 $y=\arccos u$,$u=\sqrt{v}$,$v=\tan w$,$w=a^2+x^2$ 复合而成.

五、初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数是五类基本初等函数.由于在中学数学中已经深入学习过这些函数,这里只作简要复习.

1. 幂函数

幂函数 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R})$,其定义域由 α 的取值决定.当 $\alpha=1,2,3,\frac{1}{2},-1$ 时是最常用的幂函数(见图 1-6).

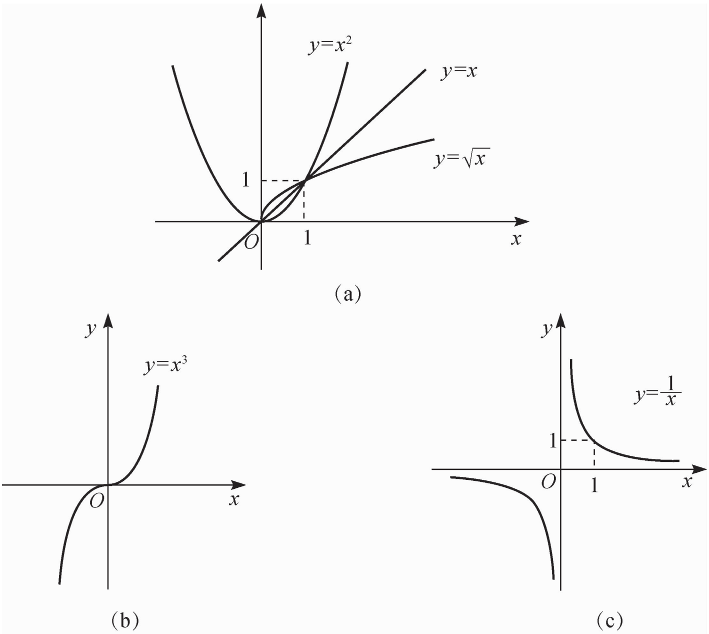

图 1-6

2. 指数函数

指数函数 $y=a^x$（a 为常数，且 $a>0, a\neq 1$），其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调减少，如图 1-7 所示. 其中最为常用的是以 e（e 是无理数，它的值是 2.718 281 828…）为底数的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$.

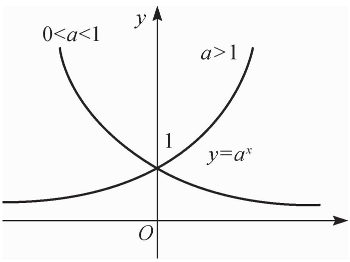

图 1-7

3. 对数函数

指数函数 $y=a^x$ 的反函数称为**对数函数**，记为 $y=\log_a x$（a 为常数，且 $a>0, a\neq$

1),其定义域为$(0,+\infty)$.当$a>1$时,对数函数$y=\log_a x$单调增加;当$0<a<1$时,对数函数$y=\log_a x$单调减少,如图1-8所示.其中以e为底的对数函数称为**自然对数函数**,记为$y=\ln x$.

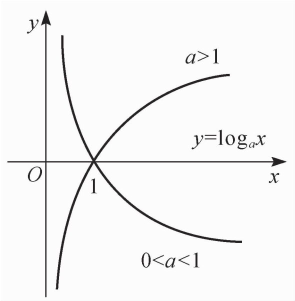

图 1-8

4. 三角函数

常用的三角函数有:

(1) 正弦函数$y=\sin x$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,它是奇函数及以2π为周期的周期函数(见图1-9).

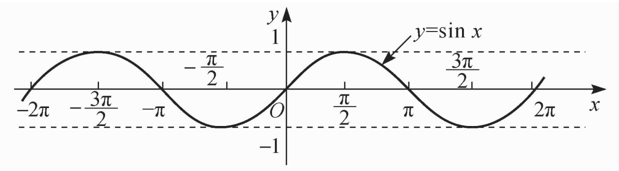

图 1-9

(2) 余弦函数$y=\cos x$,其定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,它是偶函数及以2π为周期的周期函数(见图1-10).

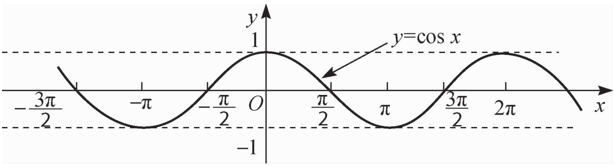

图 1-10

(3) 正切函数$y=\tan x$,其定义域为$\left\{x \middle| x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$,值域为$(-\infty,+\infty)$,它是奇函数及以$\pi$为周期的周期函数(见图1-11).

(4) 余切函数 $y=\cot x$，其定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi, k\in \mathbf{Z}\}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，它是奇函数及以 π 为周期的周期函数（见图 1-12）.

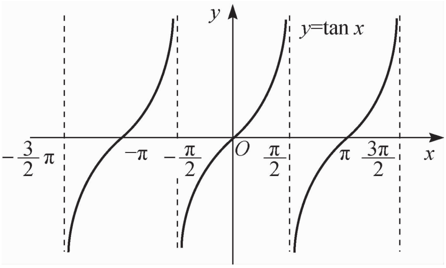

图 1-11

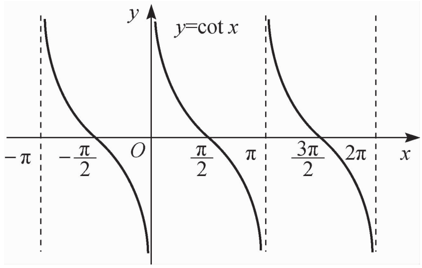

图 1-12

5. 反三角函数

三角函数的反函数称为**反三角函数**，由于三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 不是单调的，为了得到它们的反函数，需对这些函数限定在某个单调区间内来讨论. 常用的反三角函数有：

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$（见图 1-13）.

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$（见图 1-14）.

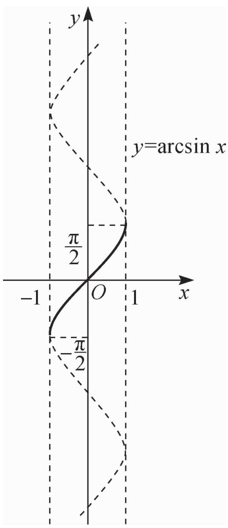

图 1-13

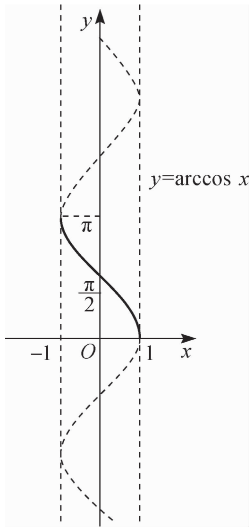

图 1-14

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$（见

图 1-15).

(4) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,\pi)$(见图 1-16).

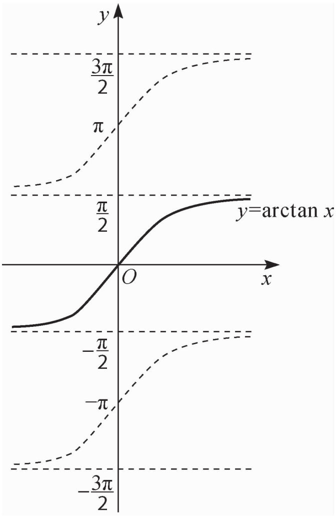

图 1-15

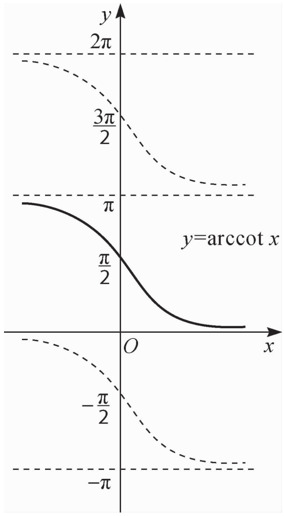

图 1-16

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为**初等函数**.

初等函数的基本特征是在函数有定义的区间内,初等函数的图形是不间断的.

6. 双曲函数和反双曲函数

下面再介绍在工程技术上常用到的一类函数(双曲函数)及其反函数(反双曲函数),它们的定义如下:

双曲正弦 $y=\operatorname{sh} x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$,

双曲余弦 $y=\operatorname{ch} x=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$,

双曲正切 $y=\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$.

从上述定义可见,双曲函数是由指数函数生成的初等函数,这三个双曲函数的简单性态如下:

(1) 双曲正弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$;它是单调增加的奇函数,其图形通过原点且关于原点对称. 当 x 的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近曲线 $y=\dfrac{1}{2}e^{x}$;在第三象限内接近于曲线 $y=-\dfrac{1}{2}e^{-x}$(见图 1-17).

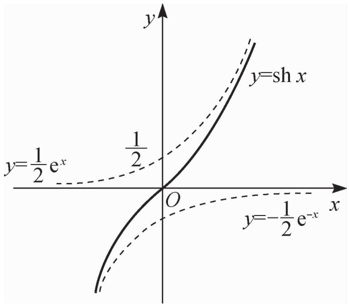

图 1-17

(2) 双曲余弦的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[1,+\infty)$;它是偶函数,它的图形过点$(0,1)$且关于y轴对称.在$(-\infty,0)$内单调减少,在$(0,+\infty)$内单调增加.当x的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近曲线$y=\dfrac{1}{2}e^{x}$;在第二象限内接近曲线$y=\dfrac{1}{2}e^{-x}$(见图 1-18).

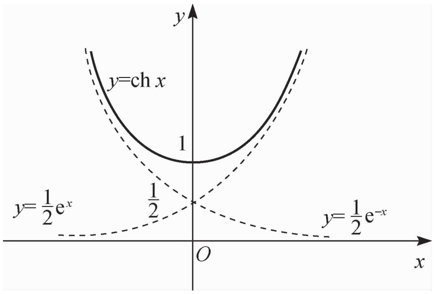

图 1-18

(3) 双曲正切的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(-1,1)$;它是单调增加的奇函数,它的图形通过原点且关于原点对称.当x的绝对值很大时,它的图形在第一象限内接近直线$y=1$;在第三象限内接近于直线$y=-1$(见图 1-19).

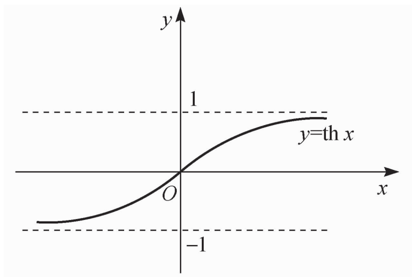

图 1-19

双曲函数的反函数称为**反双曲函数**,则双曲函数 $y = \operatorname{sh} x, y = \operatorname{ch} x (x \geqslant 0)$, $y = \operatorname{th} x$ 的反函数依次记为 $y = \operatorname{arsh} x$(反双曲正弦),$y = \operatorname{arch} x$(反双曲余弦),$y = \operatorname{arth} x$(反双曲正切).

这些反双曲函数都可以通过自然对数函数来表示. 例如,对于反双曲正弦函数 $y = \operatorname{arsh} x$, 它是 $x = \operatorname{sh} y$ 的反函数,由双曲函数的定义,有

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}, \text{即 } e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0,$$

解得

$$e^y = x \pm \sqrt{x^2 + 1},$$

因 $e^y > 0$,上式应取正号,故

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

等式两端取对数,就得到

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

由此可见,函数 $y = \operatorname{arsh} x$ 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$,它是单调增加的奇函数. 由 $y = \operatorname{sh} x$ 的图形,根据反函数的作图法,可得 $y = \operatorname{arsh} x$ 的图形(见图 1-20).

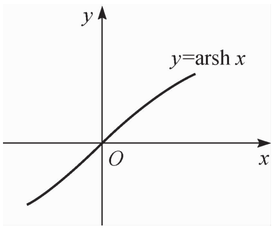

图 1-20

类似地,双曲余弦 $y = \operatorname{ch} x (x \geqslant 0)$ 的反函数,即反双曲余弦函数的表达式

$$y = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

由此可见,函数 $y = \operatorname{arch} x$ 的定义域是 $[1, +\infty)$,值域是 $[0, +\infty)$,它在定义域上是单调增加的. 由 $y = \operatorname{ch} x (x \geqslant 0)$ 的图形,根据反函数的作图法,可得 $y = \operatorname{arch} x$ 的图形(见图 1-21).

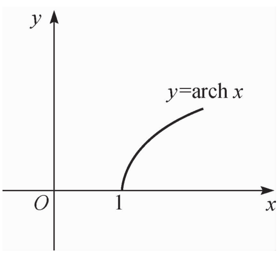

图 1-21

反双曲正切函数 $y=\operatorname{arth} x$ 的表达式为

$$y=\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},$$

其定义域是$(-1,1)$，值域是$(-\infty,+\infty)$，它在定义域上是单调增加的奇函数. 由 $y=\operatorname{th} x$ 的图形，根据反函数的作图法，可得 $y=\operatorname{arth} x$ 的图形（见图 1-22）.

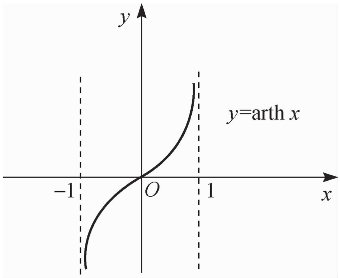

图 1-22

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{1}{4-x^2}$；　　（2）$y=\sqrt{9-x^2}$；

（3）$y=\ln(5x+1)$；　　（4）$y=\arcsin(2x-3)$；

（5）$y=\sqrt{5-x}+\ln(x-1)$.

2. 下列各对函数中，$f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

（1）$f(x)=\ln x^4, g(x)=4\ln x$；

（2）$f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}, g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$；

（3）$f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=(\sqrt{x})^2$；

（4）$f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}, g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$.

3. 求下列函数值：

（1）已知 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0, \\ 1, & x=0, \\ x^2-1, & x>0, \end{cases}$ 求 $f(-1), f(0), f(2)$；

（2）已知 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=4x-\sqrt{1+x^2}$，求 $f(1)$.

4. 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

5. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$；　　(2) $f(x)=x(x-1)(x+1)$；

(3) $f(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$；　　(4) $f(x)=x^2\ln\dfrac{1-x}{1+x}$；

(5) $f(x)=\sin x\cos x+1$；

(6) $F(x)=f(x)-f(-x)$，其中 $f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的任意函数；

(7) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$；　　(8) $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}$.

6. 指出下列周期函数的周期：

(1) $f(x)=\sin^2 x$；　　(2) $f(x)=\sin 4x$；

(3) $f(x)=5+\cos 2\pi x$；　　(4) $f(x)=|\cos x|$.

7. 求下列函数的反函数：

(1) $y=1+\ln(3x+2)$；　　(2) $y=2^{x-1}$；

(3) $y=\sqrt[3]{5x+1}$；　　(4) $y=x^2$.

8. 设 $f(x)$ 的定义域 $D=(0,1)$，求下列各函数的定义域：

(1) $f(x^3)$；　　(2) $f(\tan x)$；

(3) $f(x-a)(a>0)$.

第二节　数列的极限

极限的思想是由于求某些实际问题的精确解而产生的. 例如，我国古代数学家刘徽(公元 3 世纪)利用圆内接正多边形来推算圆面积的方法——割圆术，就是极限思想在几何学上的应用. 又如，《庄子·天下篇》中对“截丈问题”有一段名言：“一尺之棰，日截其半，万世不竭”，其中也隐含了深刻的极限思想.

极限是研究变量变化趋势的基本工具，高等数学中许多基本概念，如连续、导数、定积分、无穷级数等都是建立在极限的基础上. 极限方法也是研究函数的一种最基本的方法. 本节将首先给出数列及数列极限的定义.

一、数列的定义

定义 1　按一定次序排列的无穷多个数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$$

称为**无穷数列**，简称**数列**，可简记为 $\{x_n\}$. 其中的每个数称为数列的**项**，x_n 称为数列的**通项**（或**一般项**），n 称为 x_n 的**下标**.

在几何上，数列 $\{x_n\}$ 可看成数轴上的一个动点，它在数轴上依次取值 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$（见图 1-23）.

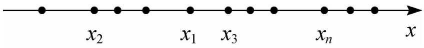

图 1-23

数列 $\{x_n\}$ 可看成自变量为正整数 n 的函数：$x_n = f(n)$，称为**整标函数**，其定义域是全体正整数. 当自变量 n 依次取 $1, 2, 3, \cdots$ 时，对应的函数值就排成数列 $\{x_n\}$（见图 1-24）.

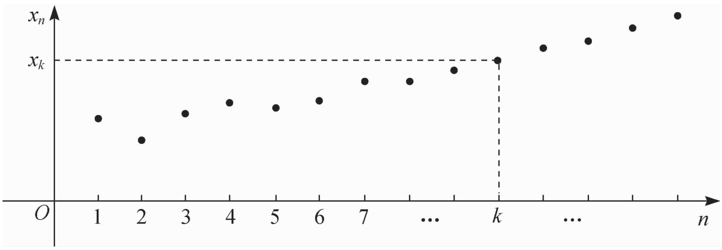

图 1-24

二、数列的极限

极限的概念最初是在运动观点的基础上，凭借几何直观产生的直觉，用自然语言来定性描述的.

定义 2　设有数列 $\{x_n\}$ 与常数 a，若当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 a，则称常数 a 为数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 a，记为

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a(n \to \infty).$$

如果一个数列没有极限，就称该数列**发散**.

从定义 2 给出的数列极限概念的定性描述可见，下标 n 的变化过程与数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势均借助了“无限”这样一个明显带有直观模糊性的形容词. 在数学中仅凭直观是不可靠的，必须将凭直观产生的定性描述转化为用数学语言表达的超越现实原型的定量描述.

定义 3　设有数列 $\{x_n\}$ 与常数 a，若对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在正整数 N，使得对于 $n > N$ 时的一切 x_n，不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的**极限**，或称数列 $\{x_n\}$ **收敛**于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 或 } x_n \to a(n\to\infty).$$

注:定义 3 中正数 ε 是任意给定的,所以 $|x_n - a| < \varepsilon$ 实际上表达了 x_n 无限接近于 a 的意思.此外,定义 3 中的 N 与任意给定的正数 ε 有关.

数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a 的几何解释:将常数 a 及数列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 表示在数轴上,并在数轴上作邻域 $U(a,\varepsilon)$(见图 1-25).注意到不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

等价于

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon,$$

所以当 $n > N$ 时,所有的点 x_n 都落在开区间 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内,而落在这个区间之外的点至多只有 N 个.

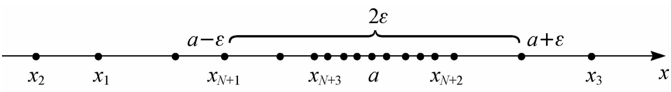

图 1-25

数列极限的定义并未给出求极限的方法,只给出了论证数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a 的方法,常称为 **ε-N 论证法**,其论证步骤为:

(1) 任意给定正数 ε.

(2) 由 $|x_n - a| < \varepsilon$ 开始分析倒推,推出 $n > \varphi(\varepsilon)$.

(3) 取 $N = [\varphi(\varepsilon)]$,再用 ε-N 语言顺述结论.

例 1　设 $y_n = C$(C 为常数),证明 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = C$.

证明　对于任意给定的正数 ε 和一切正整数 n,都有

$$|y_n - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} C = C,$$

即常数数列的极限仍是同一常数.

例 2　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$,其中常数 $\alpha > 0$.

分析　根据数列极限的定义,就是要证明:对于任意给定的正数 ε,可以找到这样的正整数 N,使得当 $n > N$ 有

$$\left|\frac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon.$$

由于 $\left|\dfrac{1}{n^\alpha}\right| = \dfrac{1}{n^\alpha}$,要想 $\left|\dfrac{1}{n^\alpha} - 0\right| < \varepsilon$,只要 $\dfrac{1}{n^\alpha} < \varepsilon$,也就是

$$n^{\alpha}>\frac{1}{\varepsilon},即\ n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

可见应该取 $N=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$.

证明　对任意给定的正数 ε，总存在正整数 $N=\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]$，当 $n>N$ 时，有

$$n>\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}},即\frac{1}{n^{\alpha}}<\varepsilon,$$

故有

$$\left|\frac{1}{n^{\alpha}}-0\right|<\varepsilon,$$

根据数列极限的定义，这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=0$.

为表达方便，引入两种量词：

(1) 全称量词，即“全体”、“所有”、“任意”，表示为 $\forall$.

(2) 存在量词，即“存在某个”、“有某个”，表示为 $\exists$.

于是，$\forall\varepsilon>0$，表示任意给定正数 ε；$\exists$正整数 N，表示存在正整数 N. 从而极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的定义可用如下“ε-N”语言来叙述：

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 N，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

例 3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明　令 $\sqrt[n]{n}-1=h_n$，由于

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=\sqrt[n]{n}-1,$$

因此

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2}h_n^2+\cdots+h_n^n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2,$$

当 $n>2$ 时，$n-1>\frac{n}{2}$，所以

$$n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2>\frac{n^2}{4}h_n^2,$$

即

$$h_n<\frac{2}{\sqrt{n}},$$

从而要使 $\left|\sqrt[n]{n}-1\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，即 $n>\frac{4}{\varepsilon^2}$. 因此，对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists$正整数 $N=$

$\max\left\{2,\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]\right\}$,当 $n>N$ 时,

$$\left|\sqrt[n]{n}-1\right|=h_n<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

三、收敛数列的性质

1. 收敛数列的有界性

定义 4 对数列 $\{x_n\}$,若存在正数 M,使得对一切正整数 n,恒有 $|x_n|\leqslant M$,则称数列 $\{x_n\}$ **有界**;否则,称其**无界**.

例如,数列 $x_n=\frac{n}{n+3}(n=1,2,3,\cdots)$ 是有界的,因为可取 $M=1$,使 $\left|\frac{n}{n+3}\right|\leqslant 1$ 对一切正整数 n 都成立. 又如,数列 $x_n=3^n(n=1,2,3,\cdots)$ 是无界的,因为当 n 无限增加时,3^n 可以超过任何正数.

几何上,若数列 $\{x_n\}$ 有界,则存在 $M>0$,使得数轴上对应于有界数列的点 x_n 都落在闭区间 $[-M,M]$ 上.

定理 1 收敛的数列必定有界.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,由数列极限的定义,若取 $\varepsilon=1$,则 $\exists$ 正整数 N,使得当 $n>N$ 时,恒有

$$|x_n-a|<1,$$

即

$$a-1<x_n<a+1,$$

若记 $M=\max\{|x_1|,\cdots,|x_N|,|a-1|,|a+1|\}$,则对一切正整数 n,皆有 $|x_n|\leqslant M$,故 $\{x_n\}$ 有界.

推论 无界数列必定发散.

注:如是数列 $\{x_n\}$ 有界,却不能断定数列 $\{x_n\}$ 一定收敛. 也就是说,数列有界是数列收敛的必要条件,但不是充分条件.

2. 极限的唯一性

定理 2 收敛数列的极限是唯一的.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$,由数列极限的定义,对于 $\forall\varepsilon>0$,$\exists$ 正整数 N_1,N_2,当 $n>N_1$ 时,恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon;$$

当 $n>N_2$ 时,恒有

$$|x_n - b| < \varepsilon.$$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，有

$$|a-b| = |(x_n - b) - (x_n - a)| \leqslant |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

因 $|a-b|$ 为非负常数，而 ε 可以任意小，所以只有 $|a-b| = 0$，即 $a = b$. 因此，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = b$，从而证得结论.

3. 收敛数列的保号性

定理 3（收敛数列的保号性）　若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a > 0$（或 $a < 0$），则存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，恒有

$$x_n > 0 \text{（或 } x_n < 0\text{）}.$$

证明　先证 $a > 0$ 的情形. 由数列极限的定义，对 $\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$，$\exists$ 正整数 N，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - a| < \frac{a}{2},$$

即

$$x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0.$$

同理可证 $a < 0$ 的情形.

推论　若数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geqslant 0$（或 $x_n \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $a \geqslant 0$（或 $a \leqslant 0$）.

证明　设数列 $\{x_n\}$ 从第 N_1 项起有 $x_n \geqslant 0$ 的情形，用反证法证明.

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < 0$，则根据定理 3，$\exists$ 正整数 N_2，当 $n > N_2$ 时，有 $x_n < 0$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，当 $n > N$ 时，按定理 3 有 $x_n < 0$，但已知 $x_n \geqslant 0$，这引起矛盾. 故必有 $a \geqslant 0$.

同理可证数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \leqslant 0$ 的情形.

4. 子数列的收敛性

在数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序，这样得到的一个数列称为原数列 $\{x_n\}$ 的**子数列**（或**子列**）.

设在数列 $\{x_n\}$ 中，第一次抽取 x_{n_1}，第二次抽取 x_{n_2}，第三次抽取 x_{n_3}，…，如此反复抽取下去，就得到数列 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$.

注：在子数列 $\{x_{n_k}\}$ 中，x_{n_k} 是 $\{x_{n_k}\}$ 中的第 k 项，是原数列 $\{x_n\}$ 中第 n_k 项. 显然，$n_k \geqslant k$.

定理 4（收敛数列与其子数列间的关系）　如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，那么它的任一子数列也收敛，且极限也是 a.

证明 设数列$\{x_{n_k}\}$是数列$\{x_n\}$的任一子数列.

由$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,故对于 $\forall \varepsilon > 0$,$\exists$正整数 N,当 $n > N$ 时,有

$$|x_n - a| < \varepsilon,$$

取 $K = N$,则当 $k > K$ 时,$n_k > n_K = n_N \geqslant N$. 于是,

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon,$$

即$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$.

由定理 4 知,若数列$\{x_n\}$有两个子数列收敛于不同的极限,则数列$\{x_n\}$是发散的.

例如,考察数列

$$1, -1, 1, \cdots, (-1)^{n+1}, \cdots,$$

因子数列$\{x_{2k-1}\}$收敛于 1,而子数列$\{x_{2k}\}$收敛于 -1,故数列

$$x_n = (-1)^{n+1} (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

是发散的. 同时此例也说明,一个发散的数列也可能有收敛的子数列.

习题 1-2

1. 观察下列数列的变化趋势,判别哪些数列有极限,如有极限,写出其极限:

(1) $x_n = \dfrac{1}{3^n}$;　　(2) $x_n = (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n}$;

(3) $x_n = (-1)^n n$;　　(4) $x_n = \sin \dfrac{n\pi}{2}$;

(5) $x_n = \cos \dfrac{1}{n}$;　　(6) $x_n = \ln \dfrac{1}{n}$.

2. 根据数列极限的定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2 + 1} = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{3n}\right) = 1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

3. 证明:设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$,且 $A > B$,则存在自然数 N,当 $n > N$ 时,恒有 $a_n > b_n$.

4. 设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

5. 对于数列$\{x_n\}$,若$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k} = a$,$\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k+1} = a$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

第三节　函数的极限

通过数列极限的学习，知道极限是研究变量变化趋势的. 而从函数角度看，数列可看成自变量为正整数 n 的函数：$x_n = f(n)$，研究数列 x_n 的极限，即是研究当自变量 $n \to \infty$ 时，函数 $f(n)$ 的变化趋势. 此处函数 $f(n)$ 的自变量 n 只能取正整数，即自变量 n 的变化是跳跃的，且其可能变化趋势只有一种，即 $n \to \infty$. 在生产和科学技术中，所讨论的自变量往往是连续变化的并且绝对值无限增大或自变量趋近于某一点时函数的变化趋势，这就是本节要学习的函数的极限问题.

一、函数极限的定义

1. 自变量趋于无穷大时函数的极限

观察函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势. 因为

$$|f(x) - 0| = \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x}\right|,$$

易见，当 $|x|$ 越来越大时，$f(x)$ 就越来越接近 0，或者说 $|x|$ 无限增大时，$\dfrac{\sin x}{x}$ 就无限接近于 0. 因为只要 $|x|$ 足够大，$\left|\dfrac{1}{x}\right|$ 就可以小于任意给定的正数.

定义 1　设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义. 若存在常数 A，对任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正数 X，使得对于满足不等式 $|x| > X$ 的一切 x 总有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 时的**极限**，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to \infty).$$

注：定义 1 中 ε 刻画了 $f(x)$ 与 A 的接近程度，X 刻画了 $|x|$ 充分大的程度，X 是随 ε 的给定而确定的.

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 的几何意义：作直线 $y = A - \varepsilon$ 和 $y = A + \varepsilon$，则总存在一个正数 X，使得当 $|x| > X$ 时，函数 $y = f(x)$ 的图形位于这两条直线之间（见图 1-26）.

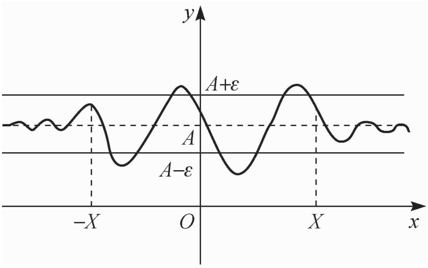

图 1-26

如果 $x>0$ 且无限增大(记为 $x\to+\infty$),那么只要把定义 1 中的 $|x|>X$ 改为 $x>X$ 就得到 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 的定义. 同样,$x<0$ 而 $|x|$ 无限增大(记为 $x\to-\infty$),那么只要把定义 1 中的 $|x|>X$ 改为 $x<-X$,就得到 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义.

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

例 1 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0$.

证明 要证 $\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,当 $x>X$ 时,

$$|\mathrm{e}^{-x}-0|=\mathrm{e}^{-x}<\varepsilon$$

成立. 因为该不等式等价于

$$-x<\ln\varepsilon,\text{即 } x>-\ln\varepsilon.$$

因此,对于 $\forall\varepsilon>0$,取 $X=-\ln\varepsilon>0$,当 $x>X=-\ln\varepsilon$ 时,不等式 $|\mathrm{e}^{-x}-0|=\mathrm{e}^{-x}<\varepsilon$ 成立. 故由定义 1 知

$$\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}=0.$$

例 2 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$.

证明 由于

$$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant\frac{1}{|x|},$$

为了使 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$,只要

$$\frac{1}{|x|}<\varepsilon,\text{即 } |x|>\frac{1}{\varepsilon}.$$

故 $\forall\varepsilon>0$,取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}>0$,当 $|x|>X=\dfrac{1}{\varepsilon}$ 时,有 $\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon$,这就证明了

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$$

例 3　证明$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{x^2-1}=3$.

证明　由于 $x\to\infty$,不妨设$|x|>1$,$\forall\varepsilon>0$,解不等式

$$\left|\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}-3\right|=\left|\frac{2x+1}{x^2-1}\right|\leqslant\frac{2|x|+1}{|x^2|-1}<\frac{2(|x|+1)}{(|x|+1)(|x|-1)}=\frac{2}{|x|-1}<\varepsilon,$$

得

$$|x|>\frac{2}{\varepsilon}+1.$$

故 $\forall\varepsilon>0$,取 $X=\dfrac{2}{\varepsilon}+1>0$,当$|x|>X=\dfrac{2}{\varepsilon}+1$ 时,有$\left|\dfrac{3x^2+2x-2}{x^2-1}-3\right|<\varepsilon$,即

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2x-2}{x^2-1}=3.$$

2. 自变量趋于有限值时函数的极限

现在研究自变量 x 趋于有限值 x_0(即 $x\to x_0$)时,函数 $f(x)$ 的变化趋势. 在 $x\to x_0$ 的过程中,对应的函数值 $f(x)$ 无限接近于 A,可用

$$|f(x)-A|<\varepsilon(\varepsilon\text{ 是任意给定的正数})$$

来表达. 又因为函数值 $f(x)$ 无限接近于 A 是在 $x\to x_0$ 的过程中实现的,所以对于任意给定的 ε,只要求充分接近于 x_0 的 x 的函数值 $f(x)$ 满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,而充分接近于 x_0 的 x 可表达为

$$0<|x-x_0|<\delta(\delta\text{ 为某个正数}).$$

根据上述分析,可给出当 $x\to x_0$ 时函数极限的定义.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义. 若对任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得对于满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 的一切 x,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\text{ 或 }f(x)\to A(x\to x_0).$$

注:(1) 函数极限与 $f(x)$ 在点 x_0 处是否有定义无关.

(2) δ 与任意给定的正数 ε 有关.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的几何解释:任意给定一正数 ε,作平行于 x 轴的两条直线 $y=A+\varepsilon$ 和 $y=A-\varepsilon$. 根据定义 2,对于给定的 ε,存在点 x_0 的一个 δ 去心邻域

$$0<|x-x_0|<\delta,$$

当 $y=f(x)$ 的图形上的点的横坐标 x 落在该邻域内时,这些点对应的纵坐标落在带

形区域 $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ 内(见图 1-27).

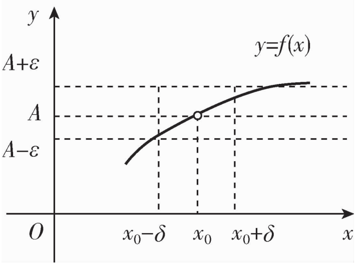

图 1-27

类似数列极限的 ε-N 论证法,可以给出证明自变量趋于有限值时函数极限的 ε-δ 论证法:

(1) 任意给定正数 ε.

(2) 由 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 开始分析倒推,推出 $|x-x_0|<\varphi(\varepsilon)$.

(3) 取定 $\delta=\varphi(\varepsilon)$,再用 ε-δ 语言顺述结论.

例 4 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

证明 当 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$ 时,$|\sin x|\leqslant|x|$,于是

$$|\cos x-1|=\left|-2\sin^2\frac{x}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{x}{2}\right|^2\leqslant\frac{1}{2}|x|^2,$$

为了使 $|\cos x-1|<\varepsilon$,只要 $|x|<\sqrt{2\varepsilon}$ 且 $|x|<\dfrac{\pi}{2}$,因此,取 $\delta=\min\left\{\sqrt{2\varepsilon},\dfrac{\pi}{2}\right\}$,于是,对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\min\left\{\sqrt{2\varepsilon},\dfrac{\pi}{2}\right\}$,当 $0<|x|<\delta$ 时,有

$$|\cos x-1|\leqslant\frac{1}{2}|x|^2<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

例 5 证明当 $x_0>0$ 时,$\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}$.

证明 设 $f(x)=\sqrt{x}$,其定义域为 $x\geqslant 0$. $\forall\varepsilon>0$,解不等式

$$\left|f(x)-\sqrt{x_0}\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|=\left|\frac{x-x_0}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right|\leqslant\frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon,$$

得 $|x-x_0|\leqslant\sqrt{x_0}\varepsilon$,而 $x\geqslant 0$ 可用 $|x-x_0|\leqslant x_0$ 保证,因此取 $\delta=\min\{\sqrt{x_0}\varepsilon,x_0\}$,于是 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\min\{\sqrt{x_0}\varepsilon,x_0\}$,当 $0<|x-x_0|<\delta$,有

$$\left|f(x)-\sqrt{x_0}\right|=\left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right|<\varepsilon,$$

即当 $x_0>0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt{x}=\sqrt{x_0}.$$

3. 单侧极限

在定义 2 中，所谓的“$x\to x_0$”指的是 x 从 x_0 的左、右两侧趋近于 x_0. 但有时只需考虑 x 从 x_0 的一侧趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 的变化趋势. 把 $f(x)$ 在点 x_0 的一侧趋近于 x_0 时的极限称为**单侧极限**.

定义 3　当自变量 x 从 x_0 的左侧(或右侧)趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋于常数 A，即若对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个正数 δ，使得当 $-\delta<x-x_0<0$(或 $0<x-x_0<\delta$) 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的**左极限**(或**右极限**)，记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A\left(\text{或}\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A\right),$$

有时也记为

$$f(x_0-0)=A(\text{或 } f(x_0+0)=A).$$

图 1-28 和图 1-29 中给出了左极限和右极限的示意图.

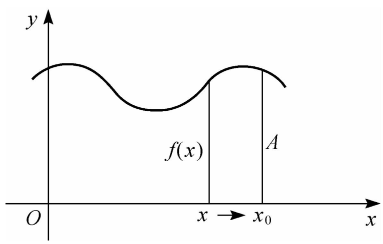

图 1-28

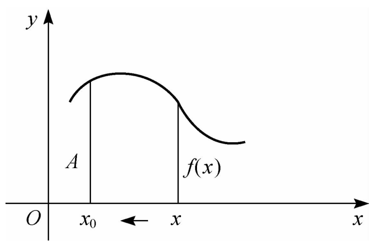

图 1-29

直接从定义 3 出发，容易证明下列定理.

定理 2　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件为 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

定理 2 说明，如果函数的两个单侧极限中有一个不存在，或者两个单侧极限存在但不相等，那么函数极限就不存在. 在判断分段函数在分点处的极限是否存在时，这个定理是相当有用的.

例 6　设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x=1,\\ x-1, & x>1,\end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

证明 由图 1-30 知

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(x^2+1)=2,\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}(x-1)=0,$$

由定理 2 知,$\lim\limits_{x\to1}f(x)$不存在.

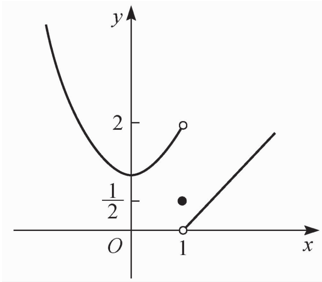

图 1-30

二、函数极限的性质

利用函数极限的定义,采用类似于证明收敛数列性质的方法,可得函数极限的一些性质.下面仅以 $x\to x_0$ 的极限形式为代表给出这些性质,至于其他形式的极限的性质,只需做些修改即可得到.

定理 3(函数极限的唯一性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则其极限是唯一的.

定理 4(函数极限的局部有界性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,所以对于给定的 $\varepsilon=1$,$\exists\,\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=1.$$

于是

$$|f(x)|=|(f(x)-A)+A|\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|,$$

令 $M=1+|A|$,则定理 4 就获得证明.

定理 5(函数极限的局部保号性) 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$(或 $A<0$),则存在常数 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

证明 不妨设 $A>0$,因为$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,所以对于给定的 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}$,$\exists\,\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon=\frac{A}{2}$$

成立，所以

$$f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0.$$

类似地可以证明 $A < 0$ 的情形.

推论　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且在 x_0 的某去心邻域内 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

定理6（函数极限与数列极限的关系）　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\{x_n\}$ 是函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n \neq x_0$（$n = 1, 2, 3, \cdots$），则相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛，且

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(x) = A.$$

证明　因 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，故对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，恒有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

又因为 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$，所以对上述 $\delta > 0$，存在 $N > 0$，当 $n > N$ 时，恒有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$，从而有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

习题 1-3

1. 根据函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x \to 1}(2x + 6) = 8$；　　(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$；

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}} = 0$；　　(4) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 + x^2}{3x^2} = \dfrac{1}{3}$.

2. 当 $x \to 0$ 时，讨论下列函数极限的存在性：

(1) $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$；　　(2) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ x, & x \geqslant 0; \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2 - x}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x + \dfrac{1}{2}, & x > 0; \end{cases}$　　(4) $f(x) = [x]$.

3. 证明:若 $x\to+\infty$ 及 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限都存在且都等于 A,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

4. 根据函数极限的定义证明:函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在的充要条件是左极限、右极限各自存在并且相等.

第四节　无穷小与无穷大

一、无穷小

对无穷小的认识问题可以远溯到古希腊. 那时,阿基米德就曾用无限小量方法得到许多重要的数学结果,但他认为无限小量方法存在着不合理的地方. 直到 1821 年,柯西在他的《分析教程》中才对无限小(即这里所说的无穷小)这概念给出了明确的回答. 而有关无穷小的理论就是在柯西理论的基础上发展起来的.

定义 1　如果函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时极限为零,那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷小**.

特别地,以零为极限的数列 $\{x_n\}$ 称为 $n\to\infty$ 时的无穷小.

例如,$\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$,函数 $\sin x$ 是当 $x\to 0$ 时的无穷小;$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$,函数 $\dfrac{1}{x}$ 是当 $x\to\infty$ 时的无穷小;$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$,数列 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$ 是当 $n\to\infty$ 时的无穷小.

注:(1) 根据无穷小的定义,无穷小本质上是这样一个变量(函数),在某一过程(如 $x\to x_0$ 或 $x\to\infty$)中,该变量的绝对值能小于任意给定的正数 ε. 无穷小不能与很小的数(如千万分之一)混淆. 但零是可以作为无穷小的唯一的常数.

(2) 无穷小是相对于 x 的某个变化过程而言的. 例如,当 $x\to\infty$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小;当 $x\to 2$ 时,$\dfrac{1}{x}$ 不是无穷小.

无穷小与函数极限有着密切的关系.

定理 1　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的充分必要条件是

$$f(x)=A+\alpha,$$

其中 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

证明　必要性. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则对于 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

令 $\alpha=f(x)-A$，则 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，且

$$f(x)=A+\alpha.$$

充分性. 设 $f(x)=A+\alpha$，其中 A 为常数，α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，于是

$$|f(x)-A|=|\alpha|,$$

因为 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小，故对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|\alpha|<\varepsilon,$$

即

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

从而 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注：定理 1 对 $x\to\infty$ 等其他情形也成立（读者可自行证明）.

定理 1 的结论在今后的学习中有重要的应用，尤其是在理论推导或证明中. 它将函数的极限运算问题转化为常数与无穷小的代数运算问题.

二、无穷小的运算性质

在下面讨论无穷小的性质中，仅证明 $x\to x_0$ 的情形，至于 $x\to\infty$ 等其他情形，证明完全类似.

定理 2　有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

证明　这里只证两个无穷小的和的情形，有限个无穷小的和的情形可以类似证明.

设 α 及 β 是当 $x\to x_0$ 时的两个无穷小，则对于 $\forall\varepsilon>0$，一方面，$\exists\delta_1>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时，恒有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{2};$$

另一方面，$\exists\delta_2>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，恒有

$$|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|\alpha+\beta|\leqslant|\alpha|+|\beta|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0}(\alpha+\beta)=0$，即 $\alpha+\beta$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小.

注：无穷多个无穷小的代数和未必是无穷小. 例如，$n\to\infty$ 时，数列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ 是无穷

小,但

$$\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}_{n\text{个}}=1,$$

即当 $n\to\infty$ 时,数列 $\left\{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$ 不是无穷小.

定理 3 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

证明 设函数 u 在 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 内有界,则 $\exists M>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_1$ 时,恒有

$$|u|\leqslant M.$$

再设 α 是当 $x\to x_0$ 时的无穷小,则对于 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta_2>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时,恒有

$$|\alpha|<\frac{\varepsilon}{M}.$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|u\cdot\alpha|=|u|\cdot|\alpha|<M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon,$$

所以当 $x\to x_0$ 时,$u\cdot\alpha$ 为无穷小.

推论 1 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

三、无穷大

若当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大(即大于预先给定的任意正数),则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大.下面给出精确的定义.

定义 2 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义).若对于任意给定的正数 M(不论它多么大),总存在正数 δ(或正数 X)使得满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$(或 $|x|>X$)的一切 x 所对应的函数值 $f(x)$ 总满足不等式

$$|f(x)|>M,$$

则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**无穷大**,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\left(\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty\right).$$

注:按通常意义来说,当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时为无穷大的函数 $f(x)$,其极限是不存在的.但为了方便叙述函数的这一性态,也说“函数的极限是无穷大”.

若在无穷大的定义中,把 $|f(x)|>M$ 换为 $f(x)>M$(或 $f(x)<-M$),则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的**正无穷大**(或**负无穷大**),记为

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty\text{(或}\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty\text{)}.$$

注:无穷大一定是无界变量.反之,无界变量不一定是无穷大.

四、无穷小与无穷大的关系

定理 4　在自变量的同一变化过程中,无穷大的倒数为无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证明　设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$,则对于 $\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon},$$

即

$$\frac{1}{|f(x)|}<\varepsilon,$$

所以当 $x\to x_0$ 时,$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

反之,设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$,且 $f(x)\neq 0$,则对于 $\forall M>0$,取 $\varepsilon=\dfrac{1}{M}$,$\exists\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,恒有

$$|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{M},$$

由于当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)\neq 0$,从而

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right|>M,$$

所以当 $x\to x_0$ 时,$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

类似地可证明 $x\to\infty$ 时的情形.

根据定理 4,可将无穷大的讨论归结为关于无穷小的讨论.

习题 1-4

1. 根据无穷小的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x \to 0} x\cos\dfrac{1}{x} = 0$; (2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x + 4} = 0$.

2. 根据无穷大的定义证明:

(1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 + 3x}{x} = \infty$; (2) $\lim\limits_{x \to +\infty} 2^x = \infty$;

(3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{x - 3} = \infty$.

3. 求下列极限并说明理由:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 1}{2x}$; (2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$.

4. 函数 $y = x\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界?这个函数是否为 $x \to \infty$ 时的无穷大?为什么?

5. 证明:函数 $y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1]$ 上无界,但这个函数不是 $x \to 0^+$ 时的无穷大.

第五节 极限运算法则

本节要建立极限的四则运算法则和复合函数的极限运算法则. 在下面的讨论中,没有表明自变量变化过程的记号"lim"是指对 $x \to x_0$ 和 $x \to \infty$ 均成立. 但在论证时,只证明了 $x \to x_0$ 的情形.

定理 1(极限的四则运算法则) 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} (B \neq 0)$.

证明 因为 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,所以由第四节定理 1 得

$$f(x) = A + \alpha, g(x) = B + \beta,$$

其中 α 和 β 是无穷小.

(1) 由于

$$f(x) \pm g(x) = (A \pm B) + (\alpha \pm \beta),$$

而 $\alpha \pm \beta$ 是无穷小，故由第四节定理 1 得

$$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim f(x) \pm \lim g(x).$$

（2）由于

$$f(x) \cdot g(x) = (A+\alpha)(B+\beta) = AB + \alpha B + A\beta + \alpha\beta,$$

又由无穷小的运算性质知，$\alpha B + A\beta + \alpha\beta$ 是无穷小，故由第四节定理 1 知

$$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B = \lim f(x) \cdot \lim g(x).$$

（3）设 $\gamma = \dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{A}{B}$，则

$$\gamma = \frac{A+\alpha}{B+\beta} - \frac{A}{B} = \frac{B\alpha - A\beta}{B(B+\beta)} = \frac{1}{B(B+\beta)} \cdot (B\alpha - A\beta),$$

由无穷小的运算性质知，$B\alpha - A\beta$ 是无穷小.

又因 β 是无穷小，于是存在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，当 $x \in \mathring{U}(x_0)$ 时，$|\beta| < \dfrac{|B|}{2}$. 所以

$$|B+\beta| \geqslant |B| - |\beta| > \frac{|B|}{2},$$

故 $\left|\dfrac{1}{B(B+\beta)}\right| < \dfrac{2}{B^2}$，由此证明了 $\dfrac{1}{B(B+\beta)}$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有界.

因此由第四节定理 3 知，γ 是无穷小. 而

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} + \gamma,$$

所以由第四节定理 1 得

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} (B \neq 0).$$

注：法则(1) 和(2) 均可推广到有限个函数的情形. 若 $\lim f_1(x)$，$\lim f_2(x)$，…，$\lim f_n(x)$ 都存在，则有

$$\lim[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_n(x)] = \lim f_1(x) \pm \lim f_2(x) \pm \cdots \pm \lim f_n(x),$$

$$\lim[f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \cdots \cdot f_n(x)] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x) \cdot \cdots \cdot \lim f_n(x).$$

推论 1　若 $\lim f(x)$ 存在，而 C 为常数，则

$$\lim[Cf(x)] = C\lim f(x),$$

即常数因子可以移到极限符号外面.

推论 2　若 $\lim f(x)$ 存在，而 n 是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

注：极限的四则运算法则要求参与运算的各个函数极限均存在，且法则(3) 还必须满足分母的极限不为零；否则，不能直接使用法则.

例 1 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+3}$.

解 由于分母的极限不为零,故

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2-5x+3}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-5x+3)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}x^2-5\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3}$$

$$=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-1}{\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-5\times 2+3}=\frac{2^2-1}{2^2-10+3}=-1.$$

例 2 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+5}{x^3-1}$.

解 由于分母极限为零,故不能直接使用法则(3).但因

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x+5}=0,$$

故由第四节定理 4 知

$$\lim_{x\to 1}\frac{x+5}{x^3-1}=\infty.$$

例 3 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$.

解 当$x\to 3$时,分母的极限为零,于是不能分子、分母分别取极限.考虑到分子与分母有公因子$x-3$,而且当$x\to 3$时,$x\neq 3$,即$x-3\neq 0$,故可约去这个不为零的公因子.所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$.

解 当$x\to 2$时,分子和分母的极限均为零,不能直接使用极限的四则运算法则.此题可先对分母有理化,再求极限.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}(\sqrt{x+2}+2)=4.$$

例 5 求$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解 因为极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-x}$和$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{1-x^2}$均不存在(无穷大),故不能直接使用极限的四则运算法则.可先通分再求极限.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{1}{x+1}\right)=-\frac{1}{2}.$$

例 6　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+4x-2}{8x^3+5x^2+3}$.

解　当 $x\to\infty$ 时，分子和分母的极限均不存在（无穷大），故不能直接使用极限的四则运算法则. 此题先用 x^3 除分子和分母，然后求极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x-2}{8x^3+5x^2+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}{8+\dfrac{5}{x}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{3}{8}.$$

例 7　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+5x+1}{x^3+3}$.

解　先用 x^3 除分子和分母，然后求极限，得

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+5x+1}{x^3+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{1+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{0}{1}=0.$$

例 8　求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+3}{x^2+5x+1}$.

解　根据例 7 的结果，由第四节定理 4 知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3}{x^2+5x+1}=\infty.$$

一般地，若 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，m 和 n 为非负整数时，有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m<n,\\ \infty, & m>n.\end{cases}$$

定理 2（复合函数的极限运算法则）　设函数 $y=f[g(x)]$ 是由函数 $y=f(u)$ 与函数 $u=g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0}f(u)=A,$$

且存在 $\delta_0>0$，当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时，有 $g(x)\neq u_0$，则

$$\lim_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim_{u\to u_0}f(u)=A.$$

证明略.

注：(1) 对 u_0 或 x_0 为无穷大的情形，也可得到类似的定理.

(2) 定理 2 表明，若函数 $f(u)$ 和 $g(x)$ 满足该定理的条件，则作代换 $u=g(x)$，可把求$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]$化为求$\lim\limits_{u\to u_0}f(u)$，其中 $u_0=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

习题 1-5

1. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+4}{x-1}$；

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{3x^2+1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+4}{x^2-1}$；

(4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}\right)$；

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\dfrac{1}{3x}\right)\left(3-\dfrac{1}{x^3}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-1}{3x^2+5x+4}$；

(8) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3+1}{x^4-x+1}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$；

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$；

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$；

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2}$.

2. 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^3\cos\dfrac{1}{x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\arctan x}{x}$.

3. 若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$，求 a,b 的值.

4. 已知 $f(x)=\dfrac{px^2-2}{x^2+1}+3qx+5$，当 $x\to\infty$ 时，p,q 取何值时，$f(x)$ 为无穷小？p,q 取何值时，$f(x)$ 为无穷大？

第六节　极限存在准则　两个重要极限

本节将介绍判定极限存在的两个准则，并讨论两个重要极限.

一、极限存在准则

1. 夹逼准则

定理 1(数列极限夹逼准则)　如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件：

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3,\cdots)$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$ 及$\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.

那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证明　因 $y_n \to a, z_n \to a$，故对于 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ 正整数 N_1 与 N_2，当 $n > N_1$ 时恒有 $|y_n - a| < \varepsilon$，当 $n > N_2$ 时，恒有 $|z_n - a| < \varepsilon$. 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，有

$$|y_n - a| < \varepsilon, |z_n - a| < \varepsilon,$$

即

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon,$$

从而，当 $n > N$ 时，恒有

$$a - \varepsilon < y_n \leqslant x_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

即 $|x_n - a| < \varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

注：利用定理 1 求极限，关键是构造出极限相同且易求的两个数列 $\{y_n\}$ 与 $\{z_n\}$.

例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

解　记 $x_n = \dfrac{1}{n^2+1} + \dfrac{2}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$，显然有

$$\frac{1}{n^2+n} + \frac{2}{n^2+n} + \cdots + \frac{n}{n^2+n} \leqslant x_n \leqslant \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+1} + \cdots + \frac{n}{n^2+1},$$

即

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} \leqslant x_n \leqslant \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2},$$

故由定理 1 知，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}\right) = \frac{1}{2}.$$

上述关于数列极限的存在准则可以推广到函数极限的情形.

定理 2（函数极限夹逼准则）　如果

(1) 当 $0 < |x - x_0| < \delta$（或 $|x| > M$）时，有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} g(x) = A$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ (x\to\infty)}} h(x) = A$.

那么,极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$ 存在,且等于 A.

定理 1 和定理 2 称为**夹逼准则**.

2. 单调有界准则

定义　若数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是**单调增加**的;若数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots,$$

则称数列$\{x_n\}$是**单调减少**的.单调增加和单调减少的数列统称为**单调数列**.

定理 3(单调有界准则)　单调有界数列必有极限.

设数列$\{x_n\}$单调增加,且$|x_n| \leqslant M$.从图 1-31 可以看出,因为数列单调增加又不能大于 M,故该数列某项以后的所有项必然集中在某数 $a(a \leqslant M)$ 的附近,即对 $\forall \varepsilon > 0$,必然 $\exists$正整数 N 与数a,使当$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon$,从而数列$\{x_n\}$的极限存在.

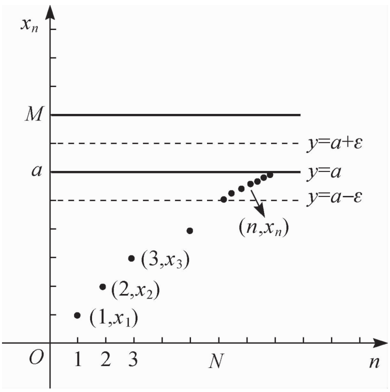

图 1-31

在第二节中曾证明:收敛的数列必定有界.但也指出有界的数列不一定收敛.而定理 3 表明,若一数列不仅有界,而且单调,则该数列一定收敛.值得注意的是,定理 3 中给出的单调有界的条件是数列收敛的充分条件,而不是必要条件。

例 2　设数列$\{x_n\}$满足 $x_1 = \sqrt{2}$,$x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}(n = 2,3,4,\cdots)$,求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　$x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = x_1 > 0$,归纳假设 $x_k > x_{k-1} > 0$,则有

$$x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k} > \sqrt{2 + x_{k-1}} = x_k > 0,$$

因此数列$\{x_n\}$是单调增加的正数列.