第3章

资金的时间价值与等值计算

资金的时间价值是经济学领域一个非常重要的概念，本章主要介绍资金的时间价值的概念、计息方法与利率、现金流量的概念及其表达、资金等值的概念、资金等值计算公式、将计息期与支付期不同的等值计算转化为计息期与支付期相同的等值计算，同时对资金等值计算的应用做了举例说明。

3.1 资金的时间价值

资金的时间价值又称为资金报酬原理，它是市场经济中的普遍现象，其实质是资金作为生产的一个基本要素，在扩大再生产及资金流通过程中，随时间的推移而产生增值。资金的时间价值表明，一定数量的资金在不同的时点具有不同的价值，资金必须与时间相结合，才能表现出真正的价值。因此，资金的时间价值是工程经济分析方法中的基本原理。

资金的增值途径随资金投入的方式而呈现差异。人们可以将资金存入银行或通过购买各种债券来获得利息；还可以用资金购买股票，以获取股息及股本增值；或者通过投资企业、项目等获得利润。一般情况下，收益与风险并存，将资金存入银行或购买债券，获利较少，但同时风险也较小；若将资金投资于证券市场，购买股票，获利通常较银行高，但风险也随之增大；此外，若将资金投资于企业、项目等，则收益的多少不仅取决于投资者对市场的把握和运作情况，同时还受许多不确定因素的影响，风险更随之加大。但是，不论采用哪种方式，资金、时间、利率（含利润率）都是获取利益的3个关键的因素，缺一不可。对于评价一个投资方案而言，要做出正确的评价，就必须同时考虑这三者及其关系，即必须考虑资金的时间价值。

资金的时间价值将借助于复利计算来表述。在对投资方案进行经济评价时，若考虑了资金的时间价值，则称为动态评价；反之，则称为静态评价。

3.1.1 利息和利率

利息是指因存款或放款而得到的超出存放款本金的价值，或者资金使用者为其使用的资本金而偿付的超出本金的价值。换句话说，利息是因放弃使用资金所得的补偿，或因占用资金所付出的代价。

利率(或利息率)是指用于计算资本金利息的百分率,即在一个计算周期内,所得到或偿付的利息额与期初借贷资金额(本金)之比。

例如,某居民在银行存款的本金为1 000元,存期为1年,年利率为5%,则存款到期本息合计为1 050元。该例中,1 000元为本金,50元为利息,5%为利率。

用来表示计算利息的时间单位称为计息周期,简称计息期。计息期可以是年、半年、季、月等,本书中如未特别指出计息的时间单位时,通常计息期以年为单位。

3.1.2 计息方法

利息的计算方式有单利计息和复利计息两种。目前,我国银行储蓄存款是按单利计息的(自动转存等特殊业务除外),贷款则是按复利计息的。

1. 单利计息

单利计息是指每期仅按本金(原金额)计算利息,而对本金所产生的利息不再计算利息的一种计息方式。其利息总额与借款时间成正比。设 P 代表本金,n 代表计息期数,i 代表利率,I 代表所付或所收的总利息,F 代表计息期内的将来值(本利和),按定义,则有

$$I=Pni \tag{3-1}$$

$$F=P+I=P(1+ni) \tag{3-2}$$

【例3-1】 设借款1 000元,合同规定借期为4年,年利率为5%,单利计息,问4年后应还的本利和为多少?

【解】 $F=P(1+ni)=1\,000\times(1+4\times5\%)=1\,200$ 元。

4年中,每年年末应支付的利息与本利和见表3-1。

表3-1 单利计息方式下的应付利息及本利和 单位:元

年 (1)	年初借款 (2)	当年利息 (3)	年末欠款总额 (4)=(2)+(3)	年末偿还总额 (5)
0	1 000			
1	1 000	1 000×5%=50	1 050	0
2	1 050	1 000×5%=50	1 100	0
3	1 100	1 000×5%=50	1 150	0
4	1 150	1 000×5%=50	1 200	1 200

则4年后应还的本利和为1 200元。

2. 复利计息

复利计息,指借款人在每期末不支付利息,而将该期利息转为下期的本金,下期再按本利和的总额计息,即不但本金产生利息,而且利息的部分也产生利息。若按复利方式计息,则有

$$F=P(1+i)^n \tag{3-3}$$

【例3-2】 在【例3-1】中,改单利计息为复利计息,其他条件不变,则4年后应还本利和为多少?

【解】 $F=P(1+i)^n=1\,000\times(1+5\%)^4=1\,215.51$ 元。

其中，每年年末应支付的利息与本利和见表 3-2。

表 3-2　复利计息方式下的应付利息及本利和　　单位：元

年 (1)	年初借款 (2)	当年利息 (3)	年末欠款总额 (4)=(2)+(3)	年末偿还总额 (5)
0	1 000			
1	1 000	1 000×5%=50	1 050	0
2	1 050	1 050×5%=52.5	1 102.5	0
3	1 102.5	1 102.5×5%=55.125	1 157.625	0
4	1 157.63	1 157.63×5%=57.88	1 215.51	1 215.51

从表 3-1 和表 3-2 的计算过程可以看出，同一笔借款，在 i、n 相同的情况下，用复利计息计算出来的利息金额数比用单利计息计算出来的利息金额数大。所借本金越大，利率越高，年数越多时，两者差距就越大。这个差距就是所谓“利生利”的结果。

3.1.3　名义利率和实际利率

通常复利计息中的利率一般指年利率，计息期也以年为单位，但计息期不为一年时也可按式(3-3)进行计算。

当年利率相同，而计息期不同时，其利息也是不同的，因而存在名义利率与实际利率之分。实际利率(real interest rate)又称为有效利率，名义利率(titular interest rate)又称为非有效利率。

【例 3-3】　设年利率为 6%，存款额为 10 000 元，期限为一年，试按：

(1)一年 1 次复利计息。

(2)一年 4 次按季度 1.5%计息。

(3)一年 12 次按月 0.5%计息。

分别求这三种情况下的本利和。

【解】　(1)一年 1 次计息：$F=10\ 000\times(1+6\%)^1=10\ 600$ 元。

(2)一年 4 次计息：$F=10\ 000\times(1+1.5\%)^4=10\ 613.64$ 元。

(3)一年 12 次计息：$F=10\ 000\times(1+0.5\%)^{12}=10\ 616.78$ 元。

由此可见：一年中，计息的次数越多，一年末所得的本利和就越多。另外，题目中的 6%，对于一年 1 次计息来说，既是实际利率又是名义利率；1 次、4 次、12 次称为计息周期数，1.5%和 0.5%称为周期利率。由上述计算可知

名义利率=周期利率×每年的计息周期数

若用 r 代表名义利率，i' 代表周期利率，m 代表每年的计息周期数，则 r、i'、m 存在下述关系：

$$r=i'm \text{ 或 } i'=\frac{r}{m} \tag{3-4}$$

通常说的年利率都是指名义利率，如果后面不对计息期加以说明，则表明一年计息一次，此时的年利率也就是年实际利率，或说是年有效利率。

一般地，如果名义利率为 r，本金 P 在一年中计息 m 次，每次计息的利率为r/m，根据复利计息的计算公式，本金 P 年末本利和为

$$F=P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m} \tag{3-5}$$

则本金 P 在一年中产生的利息为

$$I=P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-P$$

根据利率的定义，利息与本金之比为利率，则年实际利率为

$$i=\frac{P\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-P}{P}=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1 \tag{3-6}$$

式中，i 为年实际利率。

式(3-6)称为离散式复利计息的年实际利率计算公式。所谓离散式复利是指按期(年、季、月、日等)计息获得复利的方式。

在【例 3-3】中，

(1)一年 1 次计息的年实际利率：$i=$名义利率$=6\%$。

(2)一年 4 次计息的年实际利率：$i=\left(1+\frac{6\%}{4}\right)^{4}-1=6.14\%$。

(3)一年 12 次计息的年实际利率：$i=\left(1+\frac{6\%}{12}\right)^{12}-1=6.17\%$。

显然，计息次数越多，实际利率越大。如果将计息时间无限缩短，采用瞬时计息方式来计息，则称为连续式复利计息，此时年实际利率为

$$i=\mathrm{e}^{r}-1 \tag{3-7}$$

式中，e 为自然对数的底。

在【例 3-3】中若采用连续式复利计息，则年实际利率 $i=\mathrm{e}^{r}-1=\mathrm{e}^{6\%}-1=6.18\%$。

显然，连续式复利计息方式的年实际利率最大。

需要说明的是：

(1)就整个社会而言，资金确实是在不停地运动的，严格来讲，资金每时每刻都在通过生产和流通增值，故理论上应该采用连续式复利计息，但在实际进行经济评价时，考虑到便于操作等多种问题，一般采用离散式复利计息。

(2)在对投资方案进行比较时，如果参与比较的方案都采用相同的计算期和年名义利率，由于它们计息次数不同仍不可比，因而需先将名义利率转化为年实际利率后再进行计算和比较。

3.2 现金流量及其表达

3.2.1 现金流量的概念

现金流量是现代理财学中的一个重要概念，是指企业在一定会计期间按照现金收付实现制，通过一定经济活动(包括经营活动、投资活动、筹资活动和非经常性项目)而产生的现

金流入、现金流出及其总量情况的总称,即企业在一定时期内的现金和现金等价物的流入和流出的数量。例如,销售商品、提供劳务、出售固定资产、收回投资、借入资金等,形成企业的现金流入;购买商品、接受劳务、购建固定资产、现金投资、偿还债务等,形成企业的现金流出。无论是衡量企业经营状况是否良好,是否有足够的现金偿还债务,还是评价资产的变现能力如何等,现金流量都是非常重要的指标。

现金流量有三个要素,即现金流量的大小、方向和作用点。现金流量的大小,即现金数额;方向,即说明现金流入或流出;作用点,即现金流量发生的时间点(或时点)。

工程经济中的现金流量是拟建项目在整个项目计算期内各个时点上实际发生的现金流入、流出以及流入和流出的差额(又称净现金流量)。现金流量一般以计息周期(年、季、月等)为时间量的单位,用现金流量图或现金流量表来表示。

3.2.2　现金流量图

现金流量图用来表示项目系统在整个寿命周期内各时点的现金流入和现金流出的情况,如图 3-1 所示。

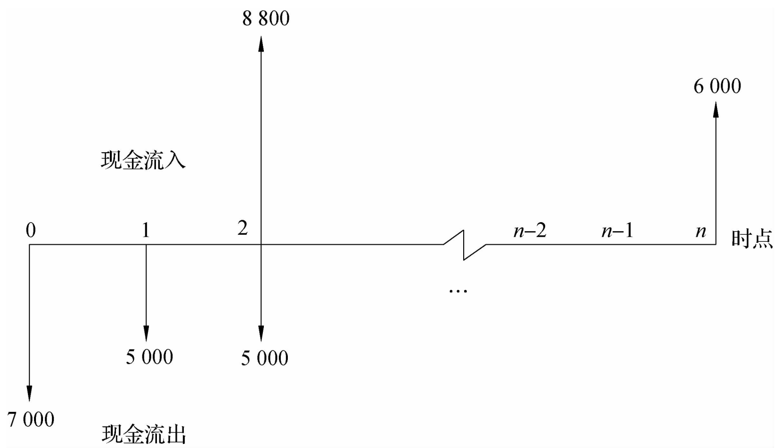

图 3-1　现金流量图(单位:元)

现金流量图的绘制方法如下:

(1)以横轴为时间轴,向右延伸表示时间的延续,轴上每一个刻度表示一个时间单位,可取年、半年、季或月等;时间轴上的点称为时点,通常它表示的是该时间单位末的时点;0 表示时间序列的起点。

(2)相对于时间坐标的垂直箭线代表不同时点的现金流量情况,现金流量的性质(流入或流出)是对特定的对象而言的。

(3)在现金流量图中,箭线的长短与现金流量数值的大小应成比例。

(4)箭线与时间轴的交点即现金流量发生的时点。

3.2.3　现金流量表

1. 现金流量表的格式

现金流量表是反映项目在一定时期内现金收入、现金支出及现金收支净额的基本财务

报表，具体格式见表3-3。

表3-3 现金流量表

序号	内容	建设期			投产期			达产期			回收期		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	$n-1$	n
1	（一）现金流入												
2	销售收入												
3	回收固定资产残值												
4	回收流动资产												
5	（二）现金流出												
6	固定资产投资												
7	流动资产投资												
8	经营成本												
9	销售税金												
10	所得税												
11	（三）净现金流量												

2. 现金流量表的作用

现金流量表的作用主要有以下几个方面：

（1）有利于使用者对企业整体财务状况做出客观评价。现金流量表能够说明企业在一定会计期间现金和现金等价物流入和流出的原因和数额，从而通过现金流量表可以大致判断企业经营周转是否顺畅；可以了解净利润的质量，为分析和预测企业的经营前景提供信息。

（2）有助于使用者评价企业的支付能力、偿债能力和周转能力。通过现金流量表并配合资产负债表和利润表，债权人可以对企业的支付能力和偿债能力以及企业对外部资金的需求情况做出可靠的判断。

（3）有利于使用者预测企业未来的发展情况。通过现金流量表，可以了解企业现金的来源和用途是否合理，分析企业未来获取或支付现金的能力，评价企业产生净现金流量的能力，从而为投资者和债权人评价企业的未来现金流量做出投资和信贷决策提供必要的信息。

3.2.4 确定现金流量应注意的问题

确定现金流量应注意以下问题：

（1）明确每一笔现金流入和现金流出发生的时点。

（2）现金流量必须是实际发生的。例如，应收账款和应付账款不能作为现金流量。

（3）对同一个经济系统的现金流量进行分析，若所站的角度不同就会产生不同的结果。例如，提到国家对企业经济活动征收的税金，从企业的角度来看是现金流出；但从国家的角度来看，在进行国民经济评价时，企业缴纳的税金并未减少国民收入，只是相应资源的分配使用权从企业转到政府手中，这是整个国民经济系统内资金的再分配（内部转移），此项税金

不是经济费用,故它既不是现金流入,也不是现金流出。

3.3 资金等值及等值计算的应用

3.3.1 资金等值的概念

在工程经济分析中,等值(equal value)是一个很重要的概念,按照资金时间价值的定义,资金在不同时点上具有的价值是不同的。如果将发生在不同时点上的数值不等的资金折算到同一时点上的数值相等,则称这些发生在不同时点上的资金等值。利用等值的概念可以把一个时点发生的资金额折算成另一时点的等值金额,这一过程叫作资金等值计算。资金的等值包括三个因素,即资金数值的大小、资金发生的时间和利率大小。资金等值是考虑了资金的时间价值的等值,其含义是:由于利息的存在,因而不同时点上的不同金额的资金可以具有相同的经济价值。例如,现在借入 1 000 元,年利率是 5%,一年后要还的本利和为 1 000+1 000×0.05=1 050 元,因而说,现在的 1 000 元与一年后的 1 050 元等值,即实际经济价值相等。

3.3.2 与资金等值相关的基本概念

将发生在不同时点上的资金进行换算所得到的结果,根据其相对的时间关系,可称为时值、现值和等额值。

(1)时值(future value)。所谓时值,是指资金在运动过程中所处某一时点时的价值,用 F 表示。

将资金现在的价值或某一时刻的价值换算成若干年以后的价值,换算后的价值称为未来值或复利终值(compound amount),有时也称为时值或本利和。

(2)现值(present value)。所谓现值,即货币现在的价值,用 P 表示。将未来某一时刻的资金或某一时段的资金系列换算成现在的价值,换算后的价值称为现值。

(3)等额值。以某一确定的时间长度为单位,将资金的时值或现值换算成包含若干个此长度的时间序列内,单位时间长度的等值资金序列,此即等额值或等值资金序列,用 A 表示。这个等值资金序列,与其换算前的现值或时值、货币的时间价值相等。当以年为单位时间的长度时,此等额值称为年值或年金。

例如,某居民贷款买房,贷款额为 60 万元,贷款时间为 15 年,年利率为 3.84%,还款方式为以月为单位等额支付,则该居民需每月偿还贷款 4 390.17 元,共偿还 180 期,月利率为 0.32%,到期时,该居民共偿还本息 790 230.6 元。这里,15 年为确定的时间单位,整个还款期时间序列中包含 180 个时间段,4 390.17 元为整个时间序列中每个时间段的等额值,60 万元为现值,790 230.6 元为时值,即在时间为 15 年、月利率为 0.32%的条件下,现在的 60 万元、15 年后的 790 230.6 元和 15 年内的 180 个 4 390.17 元,在价值量的关系上是等值的。

3.3.3 资金等值计算公式

1. 一次支付终值公式和现值公式

假定在时点 $t=0$ 时的资金现值为 P，并且利率 i 已定，则复利计息方式下几个计息周期后的终值 F 的计算公式为

$$F=P(1+i)^n \tag{3-8}$$

式(3-8)即一次支付终值公式，式中$(1+i)^n$ 称为一次支付终值系数，简记为$(F/P,i,n)$，其值可查附表 1 得到，式(3-8)对应的现金流量图如图 3-2 所示。

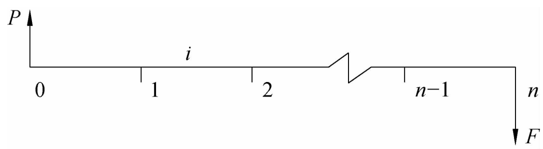

图 3-2　一次支付现金流量图

例如，按 8%的复利计息，将 1 000 元存入银行，则 5 年后的终值为

$$F=P(1+i)^n=1\,000\times(1+8\%)^5=1\,469.33(元)$$

在图 3-2 中，当终值 F 和利率 i 已知时，可以得出按复利计息的现值 P 的计算公式为

$$P=F(1+i)^{-n} \tag{3-9}$$

式(3-9)即一次支付现值公式，式中$(1+i)^{-n}$称为一次支付现值系数，简记为$(P/F,i,n)$其值可通过查附表 2 得到。

例如，某人按复利 8%计息，想在 5 年后取出 1 000 元，则现在需向银行存入现金的值为

$$P=F(1+i)^{-n}=1\,000\times(1+8\%)^{-5}=680.58(元)$$

说明：将未来的金额依据某个利率按复利计息折算成现值，叫作“折现”，而这个利率称为“折现率”或“贴现率”。

2. 等额支付系列终值公式和积累基金公式

在工程经济的研究中，常常需要求出如果连续在若干期的期末支付等额的资金 A，最后所积累起来的资金为多少。假定利率为 i，则第 n 年年末积累的资金，即终值 F 为

$$F=A(1+i)^0+A(1+i)^1+\cdots\cdots+A(1+i)^{n-1}$$

两边同时乘以$(1+i)$，可得

$$F(1+i)=A(1+i)^1+A(1+i)^2+\cdots\cdots+A(1+i)^n$$

减去原式，整理得

$$F=A\,\frac{(1+i)^n-1}{i} \tag{3-10}$$

式(3-10)即称为等额支付系列终值公式，式中$\frac{(1+i)^n-1}{i}$称为等额支付系列终值系数，简记为$(F/A,i,n)$，其值可以查附表 3 求得，公式对应的等额支付系列(F,i,A,n)现金流量图如图 3-3 所示。

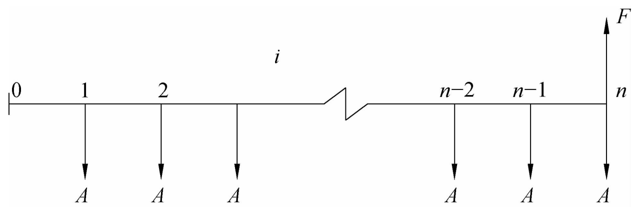

图 3-3　等额支付系列(F,i,A,n)现金流量图

例如,某人从参加工作开始准备每年存入银行 20 000 元,年利率为 2%,那么此人第 10 年年末一共可从银行提取的金额为

$$F=A(F/A,i,n)=20\,000(F/A,2\%,10)=218\,994(\text{元})$$

相反,如果某人为了能在第 n 年年末筹集到一笔钱 F,按年利率 i 计算,从现在开始,每年连续等额存款,每年必须存储多少元?

显然,该问题可通过对等额支付系列终值公式进行变换得到,即

$$A=F\frac{i}{(1+i)^n-1} \tag{3-11}$$

式(3-11)即等额支付系列积累基金公式,式中$\frac{i}{(1+i)^n-1}$称为等额支付系列积累基金系数,简记为$(A/F,i,n)$,其值可以计算得到,也可通过查附表 4 得到。

例如,某人为了在 5 年后拥有 10 万元钱,年利率按 2%计算,那么此人从现在起平均每年应向银行存款的金额为

$$A=F(A/F,i,n)=10(A/F,2\%,5)=1.92(\text{万元})$$

3. 等额支付系列资金恢复公式和现值公式

某人以年利率 i 存入资金 P,他要在之后 n 年内连本带息在每年年末以等额资金 A 的方式取出,这一情况可用图 3-4 表示。

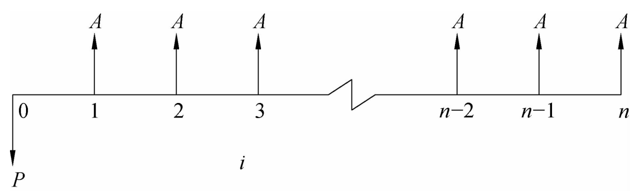

图 3-4　等额支付系列(P,A,i,n)现金流量图

由一次支付终值公式和等额支付系列积累基金公式,即 $F=P(1+i)^n$ 和 $A=F\frac{i}{(1+i)^n-1}$可得

$$A=P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} \tag{3-12}$$

式(3-12)即等额支付系列资金恢复公式,式中$\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}$称为等额支付系列资金恢复系数,记为$(A/P,i,n)$,其值可计算,也可通过查附表 5 得到。

例如,某同学上大学时,家人为其一次性存入银行 5 万元,假定利率为 5%,则该同学在

大学 4 年期间，每年年末可以从银行取出的资金为

$$A=P\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}=5\times\frac{5\%\times(1+5\%)^4}{(1+5\%)^4-1}=1.41(\text{万元})$$

与等额支付系列资金恢复公式相反，若按年利率 i 计算，为了能在今后几年内，每年年末取出相等金额的资金 A，那么现在必须投资的金额可用式(3-13)计算。

$$P=A\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n} \tag{3-13}$$

式(3-13)即等额支付系列现值公式，式中$\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$称为等额支付系列现值系数，简记为$(P/A,i,n)$，其值可通过查附表 6 得到。

例如，按年利率 2%计算，若水厂为了能在今后 5 年中每年年末提取 100 万元的资金，则现在应存入银行的资金为

$$P=A\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}=100\times\frac{(1+2\%)^5-1}{2\%\times(1+2\%)^5}=471.35(\text{万元})$$

4. 均匀梯度系列公式

均匀梯度系列也称为等差系列，是一种等额增加或减少的现金流量系列。换言之，这种现金流量系列的收入或支出每年以相同的数量发生增、减变化。例如，设备的维修费用往往随设备的陈旧程度而逐年增加。这类逐年上升的费用，虽然并不是严格地按线性规律变化，但可根据多年资料整理成梯度系列简化计算。

若用 G 代表收入或支出的年等差变化值，某一均匀梯度现金流量系列如图 3-5 所示。

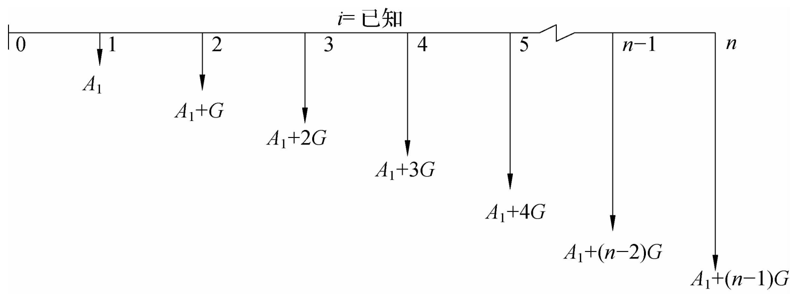

图 3-5 均匀梯度现金流量系列

假定 A_1 和 G 已知，则求与其等值的现值的公式可按下述方法推导：

我们先把图 3-5 所示的均匀梯度现金流量系列分解为图 3-6 所示的两个现金流量系列，一个系列为自第 1 年年末起每年年末发生等额金额 A_1，另一个系列为第 2 年年末发生金额 G，以后每年分别较上一年增加数额 G。

图 3-6(a)的现金流量的等值现值为

$$P_1=A_1\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}$$

而图 3-6(b)的现金流量的等值现值为

$$P_2=\frac{G}{(1+i)^2}+\frac{2G}{(1+i)^3}+\frac{3G}{(1+i)^4}+\cdots+\frac{(n-2)G}{(1+i)^{(n-1)}}+\frac{(n-1)G}{(1+i)^n}$$

$$=G\left[\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{2}{(1+i)^3}+\frac{3}{(1+i)^4}+\cdots+\frac{(n-2)}{(1+i)^{(n-1)}}+\frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right]$$

经推导、整理可得

$$P_2=\frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

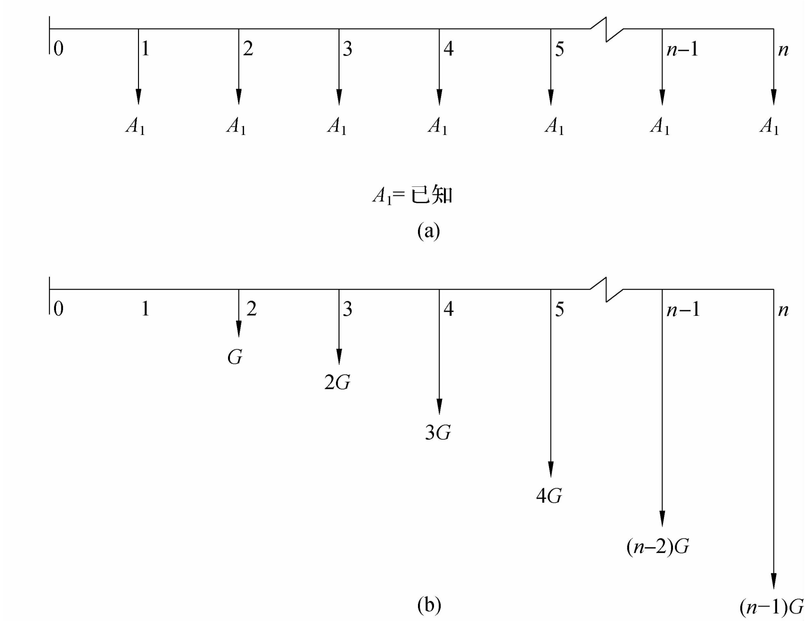

图 3-6　均匀梯度现金流量系列分解

于是，

$$P=P_1+P_2=A_1\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}+\frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$=A_1(P/A,i,n)+G(P/G,i,n) \tag{3-14}$$

式(3-14)即均匀梯度增加系列现值公式，式中$\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right]$称为均匀梯度系列现值系数，简记为$(P/G,i,n)$。

把均匀梯度增加系列现值公式两边同乘以一次支付终值系数$(1+i)^n$，则可得到均匀梯度增加系列终值公式，即

$$F=A_1\frac{(1+i)^n-1}{i}+\frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}-n\right] \tag{3-15}$$

式中，$\frac{1}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}-n\right]$称为均匀梯度系列终值系数，简记为$(F/G,i,n)$。

所以均匀梯度增加系列终值公式也可以表示为

$$F=A_1(F/A,i,n)+G(F/G,i,n)$$

若要将图 3-5 的均匀梯度增加系列现金流量折算成等值等额系列 A，则可使用等额支付系列资金恢复公式先求图 3-6(b)的等值等额支付系列金额 A_2。

$$A_2=\frac{G}{i}\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}-\frac{n}{(1+i)^n}\right]\cdot\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}=G\left[\frac{1}{i}-\frac{n}{(1+i)^n-1}\right]$$

所以，

$$A=A_1+A_2=A_1+G\left[\frac{1}{i}-\frac{n}{(1+i)^n-1}\right] \tag{3-16}$$

式(3-16)即均匀梯度增加系列等值年度费用公式，式中$\frac{1}{i}-\frac{n}{(1+i)^n-1}$称为均匀梯度系列年度费用系数，简记为$(A/G,i,n)$，其值可以计算求得，也可通过查附表7得到。

例如，某人参加工作第一年年末在银行存款10 000元，以后9年每年递增存款1 000元，若年利率为2%，则到第10年年末，这些存款相当于每年存入等额支付系列金额为

$$A=A_1+G(A/G,i,n)=10\ 000+1\ 000(A/G,2\%,10)=14\ 336.7(\text{元})$$

当然，均匀梯度系列系数也可用来计算均匀减少的系列，其计算式为

$$A=A_1-A_2=A_1-G\left[\frac{1}{i}-\frac{n}{(1+i)^n-1}\right]=A_1-G(A/G,i,n)$$

例如，某人第一个年年末在银行存入10 000元，以后10年每年递减1 000元，如年利率为2%，则相当于这个系列的年末等额支付系列金额为

$$A=A_1-G(A/G,i,n)=10\ 000-1\ 000(A/G,2\%,10)=5\ 663.3(\text{元})$$

5. 等比系列公式

在经济分析过程中，可能遇到资金系列呈几何级数增长或减少的情况，这种情况称为等比系列类型。

如图3-7所示，其中A_j/A_{j-1}的值为常数g，即公比为g，则

$$A_j=A_{j-1}g=A_1g^{j-1}$$

其中，$j=1,2,\cdots,n$。

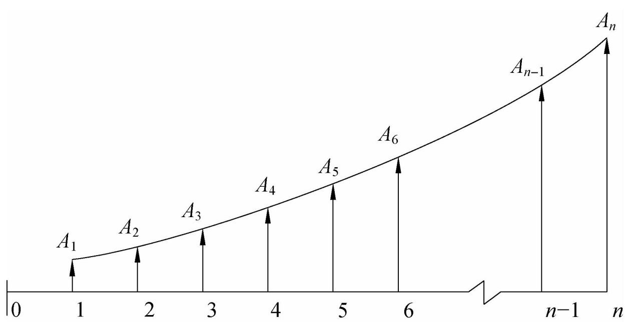

图3-7 递增等比系列图示

(1) 等比系列终值。等比系列中，第j年资金的终值为$F_j=A_j(1+i)^{n-j}=A_1g^{j-1}(1+i)^{n-j}$。

F_j系列也是一个等比系列，其公比$q=g/(1+i)$。根据等比数列前n项和公式$S_n=F_1\frac{q^n-1}{q-1}$可得等比系列终值为

$$F=\sum_{j=1}^{n}A_1g^{j-1}(1+i)^{n-j}$$

$$=A_1(1+i)^{n-1}\frac{\frac{g^n}{(1+i)^n}-1}{\frac{g}{1+i}-1}$$

$$=A_1\frac{g^n-(1+i)^n}{g-i-1}$$

(2)等比系列现值。等比系列中，第 j 年资金的现值为 $P_j=A_j(1+i)^{-j}=A_1g^{j-1}(1+i)^{-j}$。

P_j 系列是一个等比系列，其公比 $q=g/(1+i)$。根据等比数列前 n 项和公式可得等比系列现值为

$$P=\sum_{j=1}^{n}A_1g^{j-1}(1+i)^{-j}$$

$$=A_1(1+i)^{-1}\frac{\frac{g^n}{(1+i)^n}-1}{\frac{g}{1+i}-1}$$

$$=A_1\frac{\frac{g^n}{(1+i)^n}-1}{g-i-1}$$

(3)等比系列年值。将等比系列终值公式带入等额支付系列积累基金公式，可以得出等比系列年值公式为

$$A=A_1\frac{g^n-(1+i)^n}{g-i-1}\cdot\frac{i}{(1+i)^n-1}$$

6. 运用等值公式计算时应注意的事项

运用等值公式进行计算时，应注意以下几点：

(1)实施方案的建设投资，假定发生在方案的每个计息期(年)初。

(2)方案实施过程中的经常性支出，假定发生在每个计息期(年)末。

(3)本年的年末即下一年的年初。

(4)P 在当前年度开始时发生，F 在当前以后的第 n 年年末发生，A 在考察期间各年年末发生。当问题包括 A 和 P 时，系列的第一个 A 在 P 发生一年后的年末发生；当问题包括 A 和 F 时，系列的最后一个 A 和 F 同时发生。

(5)均匀梯度系列中，第一个 G 发生在系列的第二年年末。

3.3.4 计息期与支付期相同的计算

1. 计息期为一年的等值计算

计息期为一年时，实际利率与名义利率相同，利用等值计算公式可以直接进行等值计算。

2. 计息期小于一年的等值计算

计息期小于一年时，实际利率与名义利率不相同，此时要先求出计息期的实际利率，再利用等值计算公式进行计算。

【例 3-4】 年利率为 8%，每季度计息一次，从现在起连续 3 年每季度末支付 500 元的等额支付金额，则与其等值的第 3 年年末的将来值为多少？

【解】 先求出每个计息期的实际利率。

$$i=\frac{8\%}{4}=2\%$$

$$n=3\times4=12(\text{期})$$

现金流量图如图 3-8 所示。

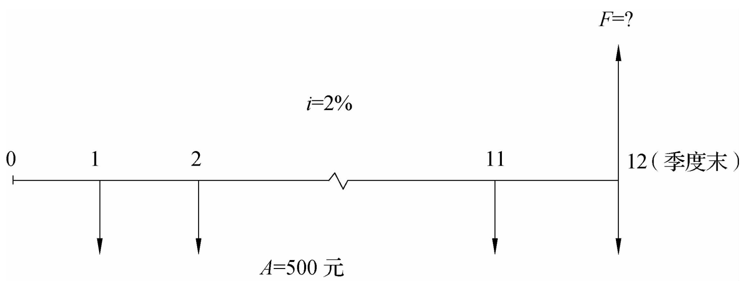

图 3-8 【例 3-4】现金流量图

由 $F=A\dfrac{(1+i)^n-1}{i}$，得 $F=500\times\dfrac{(1+2\%)^{12}-1}{2\%}=6\ 706.04$ 元。

3.3.5 计息期与支付期不相同的计算

对于计息期与支付期不相同的等值计算，常用的办法是进行转化，使计息期与支付期相同后再利用等值公式进行计算。

1. 计息期短于支付期的计算

【例 3-5】 年利率为 8%，每季度计息一次，从现在起连续 3 年的每年年末借款为 10 000 元，则与其等值的第 3 年年末的借款金额为多少？

【解】 其现金流量图如图 3-9 所示。

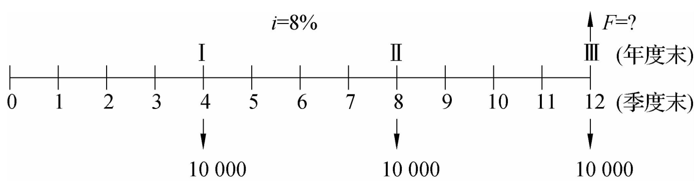

图 3-9 按季度计息年度支付的现金流量图(单位：元)

对题意进行分析，本题可理解为：每年向银行借款一次，支付期为 1 年，按照年利率 8% 每季度计息一次，即计息期短于支付期。由于按季度计算利息，而在年底支付，故计息期末不一定有支付，所以不符合直接采用等值公式计算的条件，这就需要对其进行一定的转化，使其符合等值公式的要求后再利用等值公式进行计算，具体解法有三种。

方法一：先求出支付期的实际利率，然后以支付期为基础进行计算。本例的支付期为 1 年，先计算 1 年的实际利率，然后以 1 年为基础进行计算。其现金流量图如图 3-10(a)所示。

$$i=\text{年实际利率}=\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}-1=\left(1+\frac{8\%}{4}\right)^{4}-1=8.24\%$$

由此可得

$$F=A(F/A,i,n)=10\ 000(F/A,8.24\%,3)=32\ 540(\text{元})$$

方法二:分别求出每个支付期的将来值,然后对将来值求和。其现金流量图如图 3-10(b)所示。

计息期的实际利率为

$$i_{\text{季}}=\frac{r}{m}=\frac{8\%}{4}=2\%$$

$$F=10\ 000(F/P,2\%,8)+10\ 000(F/P,2\%,4)+10\ 000(F/P,2\%,0)=32\ 540(\text{元})$$

式中,第一项代表第一年年末所借 10 000 元计息 8 次;第二项代表第二年年末所借 10 000 元计息 4 次;最后一项代表第三年年末所借 10 000 元计息 0 次。

方法三:取一个循环周期(以第一年为例),使这个周期的年末支付转变成等值的计息期的等额支付系列,其现金流量图如图 3-10(c)所示。

由等额支付系列积累基金公式,有

$$A=F(A/F,i_{\text{季}},n)=F(A/F,2\%,4)=2\ 426.24(\text{元})$$

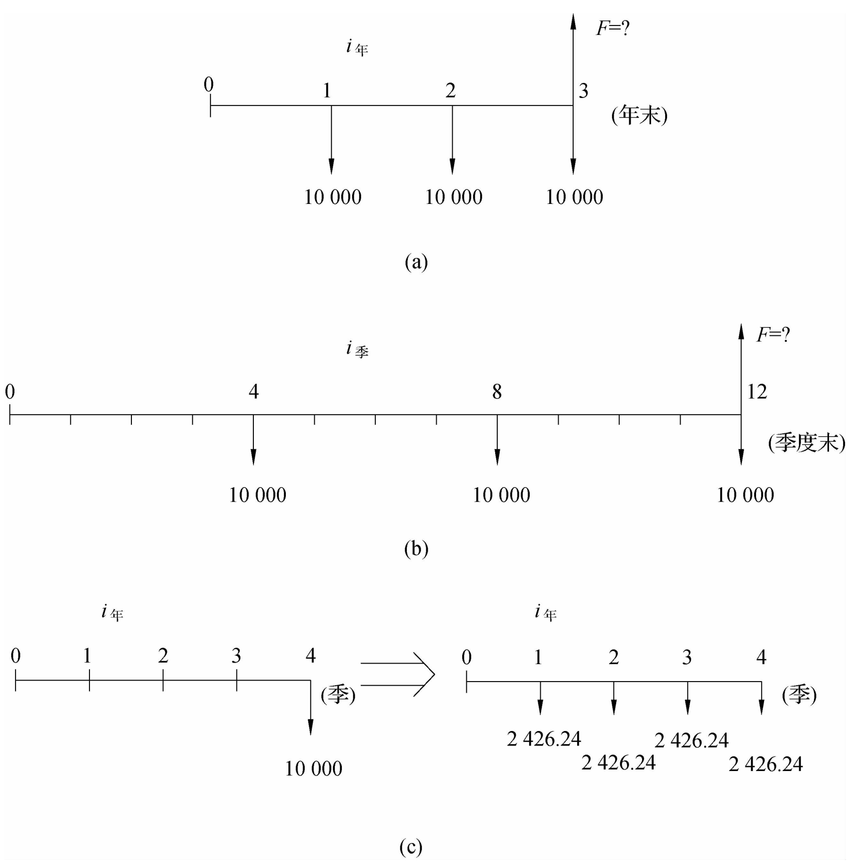

图 3-10　不同方法下的现金流量图(单位:元)

经过转化后，计息期和支付期完全重合，可直接利用等值公式进行第一年年末借款额的计算，且这种方法适用于后两年。这样图 3-9 可用图 3-11 取代。

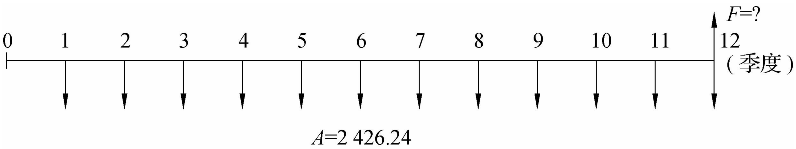

图 3-11　经转变后计息期与支付期重合（单位：元）

由此，

$$F=A(F/A,i,n)=2\,426.24(F/A,2\%,12)=32\,540(\text{元})$$

以上 3 种方法计算表明，按年利率 8%每季度计息 1 次，从现在起连续 3 年的10 000 元等额年末借款值与第 3 年年末的 32 540 元等值。

2. 计息期长于支付期的计算

当计息期长于支付期时，资金等值计算通常遵循如下原则：存款或借款必须存满一个计息期时才计算利息，即在计息期存入或借入的款项在该期不计算利息，要到下一期才计算利息。因此，计算时，计息期的存款或借款应放在其所在计息期期末，而计息期间的提款或还款则应放在其所在计息期期初。

【例 3-6】　假定有某项财务活动，其现金流量图如图 3-12 所示。试求出按季度计息的等值将来值（假定年利率为 6%）。

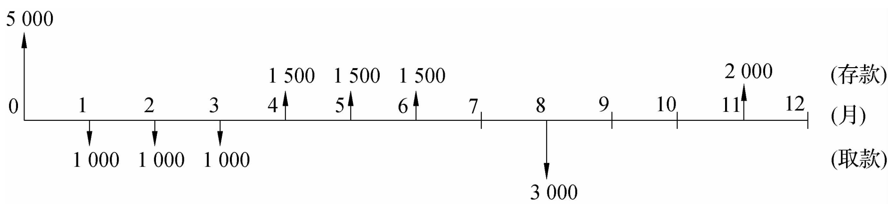

图 3-12　某项财务活动的现金流量图（单位：元）

【解】　按照计息期长于支付期的等值计算处理原则，可对图 3-12 加以整理，得到等值的现金流量图，如图 3-13 所示。

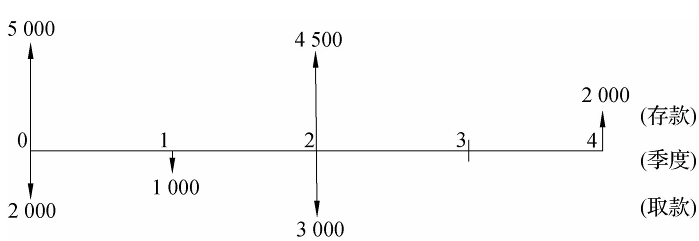

图 3-13　按季度计息整理后的现金流量图（单位：元）

题中给出年利率为 6%，所以季度利率 $i_{季}=\dfrac{r}{m}=\dfrac{6\%}{4}=1.5\%$。则此时按季度计息的等值将来值为

$$
\begin{aligned}
F=&(5\ 000-2\ 000)(F/P,1.5\%,4)-1\ 000(F/P,1.5\%,3)+\\
&(4\ 500-3\ 000)(F/P,1.5\%,2)+2\ 000\\
=&5\ 683.75(\text{元})
\end{aligned}
$$

即该财务活动完成后，还存有现金 5 683.75 元。

3.3.6　等值计算的应用

在建设项目经济评价中，资金筹措和还本付息方案是重要内容，为了科学地决策，必须制定资金偿还方案，以供比较和选择，其中等值概念及计算方法是关键。

【例 3-7】　某企业两年前有资金 100 万元，资金积压了两年未发挥作用，如果按 8%的年利率复利计息来考虑资金的时间因素，则相当于现在损失了多少资金？

【解】　与两年前 100 万元等值的现在的金额为 $100\times(1+8\%)^2=116.64$ 万元。

故该项资金积压两年未用，相当于损失 116.64−100=16.64 万元。

【例 3-8】　某污水处理厂为了扩大处理规模，拟向银行借款 12 000 万元，年利率为 8%，还款期为 4 年，请设计其还款方式。

【解】　根据资金等值概念，可制定出四种还款方案。

(1)等额本金法：每期归还等额本金并支付应付的利息，每期归还的利息因贷款总额递减而递减。

(2)等额利息法：每期只归还利息，本金在最后一年一次还清，因借款总额不变，所以每期利息是等额的。

(3)等额年金法：每年归还等额的本利和，其中还本额逐期递增，付息额逐期递减，其和不变。

(4)一次性偿还：全部本金及利息在最后一期一次还清。

具体还款方案见表 3-4。

表 3-4　还款方案　　单位：万元

方案	年 (1)	每年年初欠款 (2)	该年所欠利息 (3)=8%×(2)	年终欠款 (4)=(2)+(3)	本金支付 (5)	年终付款总额 (6)=(3)+(5)
(一)等额本金法	1	12 000	960	12 960	3 000	3 960
	2	9 000	720	9 720	3 000	3 720
	3	6 000	480	6 480	3 000	3 480
	4	3 000	240	3 240	3 000	3 240
			$\sum=2\ 400$			$\sum=14\ 400$
(二)等额利息法	1	12 000	960	12 960	0	960
	2	12 000	960	12 960	0	960
	3	12 000	960	12 960	0	960
	4	12 000	960	12 960	12 000	12 960
			$\sum=3\ 840$			$\sum=15\ 840$

续表

方案	年 (1)	每年年初欠款 (2)	该年所欠利息 (3)=8%×(2)	年终欠款 (4)=(2)+(3)	本金支付 (5)	年终付款总额 (6)=(3)+(5)
(三)等额年金法	1	12 000	960	12 960	2 663.05	3 623.05
	2	9 336.95	746.96	10 083.91	2 876.09	3 623.05
	3	6 460.86	516.87	6 977.73	3 106.18	3 623.05
	4	3 354.68	268.37	3 623.05	3 354.68	3 623.05
			$\sum$ =2 492.2		$\sum$ = 12 000	$\sum$ = 14 492.2
(四)一次性偿还	1	12 000	960	12 960	0	0
	2	12 960	1 036.8	13 996.8	0	0
	3	13 996.8	1 119.74	15 116.54	0	0
	4	15 116.54	1 209.32	16 325.86	12 000	16 325.86
			$\sum$ =4 325.86		$\sum$ =12 000	$\sum$ =16 325.86

思考练习题

(1)简述利息与利率的关系。

(2)简述复利率与单利率的关系。

(3)贴现率与利率有何区别与联系?

(4)试述现值、时值与年金的关系。

(5)试述名义利率和实际利率的区别与联系。

(6)何谓现金流量?

(7)现金流量图的作用是什么?

(8)何谓资金的时间价值?

(9)当投资股票而亏本时,其投资所用的资金是否具有时间价值?

(10)某企业从银行贷款10万元,借期为3年,试分别用6%单利和6%复利计算贷款的利息。

(11)某夫妇从其孩子出生开始,每月从工资中留出1 500元作为孩子今后的家庭教育经费,然后在每年年末将当年留出的18 000元定期零存整取存入银行。若此项费用连续存入14年,到孩子22周岁时,第14年存入的18 000元已有8年了,其他年存入的都大于8年。按定期8年考虑,年利率为2.55%。求到孩子22周岁时一次取出的本利和为多少(按复利计算)。

(12)新建污水处理工程投资1 000万元,在年利率10%的前提下,要在10年内全部收回初投资,是否可行?说明理由。

(13)某公司购买了一台供水设备,原始成本为12 000元,估计能使用20年,第20年年末的残值为2 000元。运行费用固定为每年800元。此外,每使用5年后必须大修一次。大修理费用为每次2 800元。试求该设备的等值年费用(利率为12%)。

(14)现有三家银行可向某建筑企业提供贷款,其中甲银行年利率为10%;乙银行年利率为10%,每半年计息一次;丙银行年利率为10%,每季度计息一次。试问,该企业向哪家银行贷款合算?说明理由。