第一章　函　　数

微积分是高等数学课程的主要内容，它是从研究函数开始的. 函数是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型. 本章将在中学数学已有函数知识的基础上，进一步理解函数概念，并介绍反函数、复合函数及初等函数的主要性质，为微积分的学习奠定必要基础.

第一节　函数及其性质

为了研究问题的方便，首先来介绍高等数学中经常需要用到的几个基本概念.

一、集合、区间及点的邻域

1. 集合

集合概念是数学中的一个最基本的概念，一般可以把**集合**（简称**集**）理解为具有某种特定性质的事物的总体. 例如，某学校全体师生组成的一个集合；某学校某个班级的全体同学组成的一个集合；全体实数组成的一个集合；全体正整数组成的一个集合等. 集合中的每个事物称为集合的**元素**（简称**元**）. 习惯上用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素. 如果元素 a 是集合 A 中的元素，记作 $a \in A$（读作 a 属于 A）；如果元素 a 不是集合 A 中的元素，记作 $a \notin A$（读作 a 不属于 A）.

如果一个集合只含有有限个元素，那么称这个集合为有限集；不是有限集的集合称为无限集. 例如，全体英文字母组成的一个集合是有限集，全体整数组成的集合是无限集.

给定一个集合，就是给出这个集合由哪些元素组成，给出集合的方法通常有两种：列举法和描述法.

列举法就是把集合中的所有元素都列举出来写在大括号内. 例如，由 1,2,3,4,5,6,7,8 八个数组成的集合 A 可记作

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

描述法就是把集合中所有元素的公共属性描述出来，记作

$$A=\{x \mid x\text{ 具有性质 }P\}$$

例如，

$$A=\{x \mid 0<x<6\}$$

表示满足不等式 $0<x<6$ 的实数.

$$B=\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 4\}$$

表示在 xOy 平面上以原点 O 为中心，半径为 2 的圆周及其内部所有点所组成的集合.

习惯上，全体实数组成的集合记作 $\mathbf{R}$，即 $\mathbf{R}=\{x \mid x\text{ 为实数}\}$；全体有理数组成的集合记作 $\mathbf{Q}$，即 $\mathbf{Q}=\{x \mid x\text{ 为有理数}\}$；全体整数组成的集合记作 $\mathbf{Z}$，即 $\mathbf{Z}=\{x \mid x\text{ 为整数}\}$；全体自然数组成的集合记作 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N}=\{x \mid x\text{ 为自然数}\}$.

设 A,B 是两个集合，如果集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素，则称集合 A 是集合 B 的**子集**，记作

$$A\subset B(\text{读作 }A\text{ 包含于 }B)\quad\text{或}\quad B\supset A(\text{读作 }B\text{ 包含 }A)$$

如果集合 B 与集合 A 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 B 与集合 A **相等**，记作

$$A=B$$

例如，集合 $A=\{2,3\}$，集合 $B=\{x \mid x^2-5x+6=0\}$，则 $A=B$.

特别地，不包含任何元素的集合称为**空集**，记作 $\varnothing$. 并规定空集是任何集合的子集.

例如，$\{x \mid x^2+1=0\text{ 且 }x\in\mathbf{R}\}$ 是空集，因为满足条件 $x^2+1=0$ 的实数是不存在的.

注意 以后用到的集合主要指数集，即元素都是数的集合. 如果没有特别声明，以后提到的数都是指实数.

集合的基本运算有以下几种：并、交、差.

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**（简称**差**），记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x \mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}$$

特别地，若集合 B 包含于集合 A（即 $B\subset A$），则称 $A\backslash B$ 为 B 关于 A 的**余集**，或

称为**补集**,记作 $\complement_A B$. 通常我们所讨论的问题是在一个大集合 I 中进行,所研究的其他集合 A 都是 I 的子集,此时称 $I\backslash A$ 为 A 的余集,记作 $\complement_I A$ 或 A^C.

例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x \mid -3\leqslant x\leqslant 5\}$ 的余集为

$$A^C=\{x \mid x<-3 \text{ 或 } x>5\}$$

集合的并、交、差运算满足下面的基本法则.

设 A,B,C 为三个任意集合,则下列法则成立:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

$(A\backslash B)\cap C=(A\cap C)\backslash(B\cap C)$

(4) 幂等律　$A\cup A=A,\quad A\cap A=A$

(5) 吸收律　$A\cup\varnothing=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing$

$A\cup B=B,\quad A\cap B=A$,其中 $A\subset B$

$A\cup(A\cap B)=A,\quad A\cap(A\cup B)=A$

(6) 对偶律　$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$

$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

以上法则都可以利用集合的定义来验证.

在许多问题中还经常用到乘积集合的概念. 设 A,B 是任意两个非空集合,在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,把有序对(x,y)作为新的元素,它们的全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的直积,记作 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$$

例如,设 $A=\{x \mid a<x<b\}$,$B=\{y \mid c<y<d\}$,则

$$A\times B=\{(x,y) \mid a<x<b, c<y<d\}$$

它表示 xOy 平面上以(a,c),(b,c),(b,d),(a,d)为顶点的矩形内部的所有点构成的集合,而$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y) \mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\}$就表示整个坐标平面,记作 $\mathbf{R}^2$.

2. 区间及点的邻域

区间就是实数轴上的一些实数的集合,它是用得较多的一类数集.

设 a、b 都是实数,且 $a<b$,则

(1) 开区间:$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$,这里 a、$b\notin(a,b)$,a 和 b 分别称为区间(a,b)的左、右端点.

(2) 闭区间:$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$,这里 a、$b\in[a,b]$.

(3) 半开区间:$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$;$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$.

以上这些区间都称为有限区间,$b-a$ 称为区间的长度.

以后我们还要经常用到无限区间,无限的区间或半开区间表示如下

$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x<+\infty\}$;$(-\infty,b]=\{x \mid -\infty<x\leqslant b\}$;

$(a,+\infty)=\{x \mid a<x<+\infty\}$;$(-\infty,b)=\{x \mid -\infty<x<b\}$;

常用无限开区间$(-\infty,+\infty)$表示全体实数的集合 **R**.

区间用数轴表示如图 1-1-1 所示.

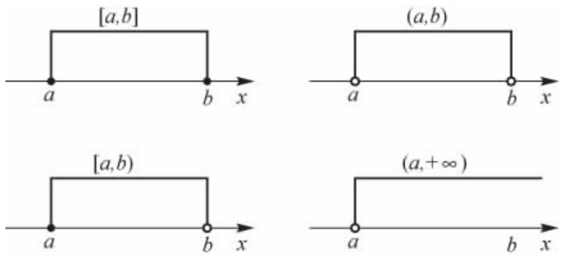


图 1-1-1

邻域也是一个经常遇到的概念.设 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$,数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$,即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域 $U(a,\delta)$ 的半径,因为 $|x-a|<\delta$,相当于 $-\delta<x-a<\delta$,即 $a-\delta<x<a+\delta$,所以有

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}.$$

由此可以看出,邻域 $U(a,\delta)$ 所表示的就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$,这个开区间就是以 a 为中心的,而长度为 2δ.

有时用到的邻域须把中心去掉.点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,称为点 a 的去心(或空心)邻域,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

邻域用数轴表示如图 1-1-2 所示.

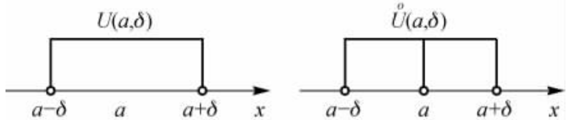


图 1-1-2

二、函数的基本概念

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中，人们会碰到许多用来表示不同事物的量，通常可将它们分为两类：一类是在某个问题的研究过程中保持不变的量，称之为常量；一类是在某个问题的研究过程中会出现变化，即可以取不同的值的量，称之为变量.

例如，学校的体育馆的面积是保持不变的，是常量；而每天来体育馆打球的人数是不同的，因而是变量.

又如，将一密闭的容器中的气体进行加热，在加热过程中，容器中气体的体积、分子数保持不变，是常量；而气体的温度、容器内的气压在不断变化，是变量.

在研究实际问题的过程中，常常发现有几个变量同时变化，它们并不是孤立的，它们不仅是相互联系的，而且还是遵循一定变化规律联系的，下面先举例说明两个变量的情形.

例 1　正方体的体积 V 与其边长 x 之间的关系为 $V = x^3$，这里 V 和 x 都是变量，当边长 x 变化时，其体积 V 也随之作相应的变化.

例 2　在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，如果取开始下落的时刻 $t = 0$，ī　　s 和 t 之间的关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad （g \text{ 为重力加速度}）$$

表示，若物体到达地面的时刻 $t = T$，则在时间区间 $[0, T]$ 上任取一个数值时，由上面的公式都可以确定出 s 的对应值.

例 3　设某产品的固定成本为 100 万元，每生产 100 件成本就增加 4 万元，已知该商品市场前景看好，即产品可以全部销售出去，又知其需求量函数为 $q = 200 - 2p$（其中 p 表示销售单价）. 显然，总成本为

$$C(q) = 100 + 4q$$

总收益为

$$R(q) = pq = \frac{1}{2}(200 - q)q = 100q - \frac{1}{2}q^2$$

因此，总利润为

$$L(q) = R(q) - C(q) = 100q - \frac{1}{2}q^2 - (100 + 4q) = -\frac{1}{2}q^2 + 96q - 100$$

即总利润是随需求量的变化而变化的.

上面三个例子的实际意义虽然不同，但却有共同之处，每个例子所描述的变化过程都有两个变量，当其中一个变量在一定变化范围内取定一个数值时，按照某一

确定的法则,另一个变量有唯一确定的数值与之对应.两个变量之间的这种对应关系,在数学上就是函数的概念.

定义 设 D 为一个给定的实数集,对于每个 $x \in D$,按照某种对应法则 f,总存在唯一确定的实数值 y 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**,习惯上也称 y 是 x 的函数,并记作

$$y = f(x), \quad x \in D$$

其中 x 称为**自变量**,y 称为**因变量**,实数集 D 称为这个函数 f 的**定义域**.

函数定义中,对于每个 $x \in D$,按照某种对应法则 f,总存在唯一确定的实数值 y 与之对应,这个实数值 y 称为函数 f 在 x 处的函数值,记作 $f(x)$,即 $y = f(x)$.当 x 取遍实数集 D 的每个数值时,对应的函数值的全体组成的数集

$$W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 f 的**值域**.

值得注意的是记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的,f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则,而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值.

如果 $x_0 \in D$,则称函数 f 在点 x_0 处有定义或有意义;如果 $x_0 \notin D$,则称函数 f 在点 x_0 处无定义或无意义.当 $x = x_0$ 时,函数 f 的值为 y_0,记为 $y_0 = f(x_0)$.如果函数在某个区间 I 上每一点都有定义,就说这个函数在该区间 I 上有定义.

如果 y 是 x 的函数,有时也可记为 $y = g(x)$,$y = F(x)$,$y = \varphi(x)$ 或 $y = y(x)$ 等.当讨论到几个不同的函数时,为了区别起见,需要用不同的记号来表示它们.

由于函数的定义域和对应法则被确定后,其值域就随之而定,因此定义域和对应法则就成了函数的两个要素.如果两个函数的定义域和对应法则都相同,则称这两个函数相同,否则就不同.

例 4 函数 $y = x^3$ 与 $y = t^3$,它们的定义域为实数集 $\mathbf{R}$,且其对应法则都是“自变量的三次方”,因此,虽然表示变量的字母不同,但它们仍然是两个相同的函数.可是对于函数 $y = \dfrac{1}{x+2}$ 与 $y = \dfrac{x}{x^2+2x}$,由于它们的定义域不同,所以它们是两个不同的函数.对于函数 $y = x$ 与 $y = \sqrt{x^2}$ 有相同的定义域,但当 $x < 0$ 时,两个函数的对应法则不同,所以它们也是两个不同的函数.

在研究函数时必须注意它的定义域.在实际问题中,函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的.如例 1 中定义域为 $D = (0, +\infty)$,例 2 中定义域为 $D = [0, T]$,例 3 中定义域为 $D = [0, 200)$.

在数学中,有时不Ж 函数的实际意义,而抽象地研究用算式表达的函数,这时约定函数的定义域就是使得这个式子的运算有意义的所有实数值,这种定义域又称为函数的自然定义域.

通常情况下,求函数定义域时要注意以下几点:

(1) 分式中分母不能为零;

(2) 偶次根式中,被开方式的值非负;

(3) 对数式中的真数大于零,底数大于零且不等于1.

例5　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$ 的定义域.

解　要使 $f(x)$ 有意义,必须使 $9-x>0$,即 $x<9$,所以函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x}}$ 的定义域为 $\{x \mid x<9\}$.

例6　求函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域.

解　要使函数 $f(x)$ 有意义,只有 $\dfrac{x}{x-2}>0$,即 $x>2$ 或 $x<0$,所以函数 $y=\lg\dfrac{x}{x-2}$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

一般情况下,表示函数的方法主要有三种:表格法、图形法、解析法(公式法).

用表格法表示函数是将函数自变量的值与对应的函数值列成表格的形式,如三角函数表、学生的成绩表等都是这种形式表示的函数.

用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x), x\in D$ 的图形.

在用解析法表示函数时,有些函数在整个定义域范围内,可以用一个数学式子表示,但有些函数在其定义域的不同部分用不同数学式子才能表示,这类函数称为分段函数.值得注意的是,分段函数的定义域是几个不相交的子定义域的并集.求分段函数值时,应该把自变量的值代入相应的取值范围的式子中进行计算.

例如,函数 $y=\begin{cases}-x+1, & 0\leqslant x<1\\ -x-1, & -1\leqslant x<0\end{cases}$ 是一个分段函数,其定义域为 $\{x \mid -1\leqslant x<1\}$.

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时,　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$;

当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时,　$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\left(-\dfrac{1}{2}\right)-1=-\dfrac{1}{2}$.

下面举几个函数的例子.

例7　函数 $y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$ 称为绝对值函数,它的定义域为 $(-\infty,+$

∞)，值域为$[0,+\infty)$，它的图象如图 1-1-3 所示.

例 8 函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$ 称为符号函数，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\{-1,0,1\}$，它的图象如图 1-1-4 所示.

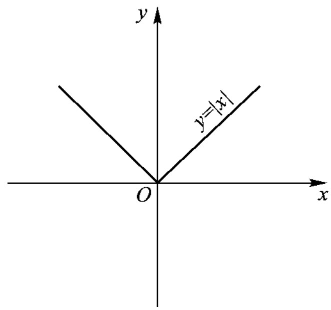


图 1-1-3

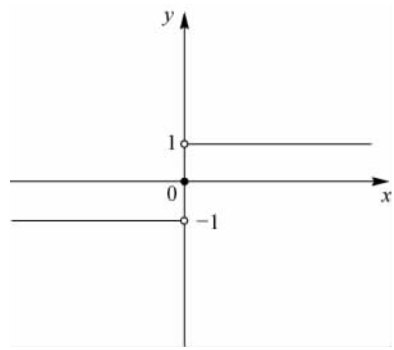


图 1-1-4

例 9 函数 $y=f(x)=[x]=n, n\leqslant x<n+1$，其中 n 为整数，记号$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 例如，$\left[\dfrac{3}{5}\right]=0$，$[\sqrt{3}\,]=1$，$[\pi]=3$，$[-1]=-1$，$[-4.6]=-5$.

显然，函数 $y=[x]$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为全体整数，它的图象如图 1-1-5 所示，这图形称为阶梯曲线. 在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1，这函数称为取整函数.

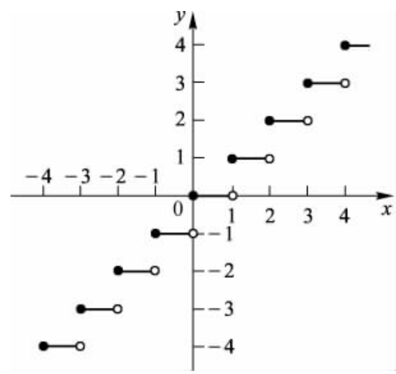


图 1-1-5

三、函数的几种特性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义.

1. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间，若对于任意 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

2. 周期性

若存在不为零的数 T，使得对于任意 $x \in I$，有 $x + T \in I$，且 $f(x+T) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期函数的周期是指它的最小正周期.

3. 单调性

若对于区间 I 内任意两点 x_1, x_2，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加，区间 I 称为单调增区间；若 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少，区间 I 称为单调减区间. 单调增区间或单调减区间统称为单调区间.

4. 有界性

对于函数 $y = f(x)$，若存在正数 M，使得在区间 I 上恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上有界.

第二节　反函数与复合函数

为了进一步研究函数的概念，以方便今后研究函数的性态，本节介绍反函数和复合函数的概念.

一、反函数

在函数定义中，规定了对于每一个 x，都有唯一的 y 与之对应，这样定义的函数又称为单值函数；如果有两个或更多的数值 y 与之对应，就称 y 是 x 的多值函数. 本书主要讨论单值函数.

在函数中，自变量与因变量的地位是相对的，任意一个变量都可根据需要作为自变量. 例如，在函数 $y = x + 5$ 中，x 是自变量，y 是因变量，根据这个式子，可以解出 $x = y - 5$，这里 y 是自变量，x 是因变量. 上面两个式子反映了同一个过程中两个变量之间地位的相对性，称它们互为反函数.

下面给出反函数的具体定义：

定义 1　设函数 $y = f(x)$，其定义域为 D，值域为 M，如果对于任意 $y \in M$，由函数关系式 $y = f(x)$ 恰好**唯一**确定出一个 $x \in D$ 与之对应，ī　认为 x 是 y 的函数，记作 $x = g(y)$，我们称上述的 $y = f(x)$ 与 $x = g(y)$ 互为**反函数**，习惯上将 $x = g(y)$ 记作

$$x = f^{-1}(y)$$

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示因变量，故常把 $y = f(x)$ 的反函数写作

$$y = f^{-1}(x)$$

由反函数的定义知,在定义区间上**单调**的函数必有反函数.

例 1 函数 $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,则 $x = f^{-1}(y) = \arcsin y, y \in [-1,1]$,故 $y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 的反函数是 $y = \arcsin x, x \in [-1,1]$.

若把函数 $y = f(x)$ 与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图象画在同一平面直角坐标系内,那么这两个图象关于 $y = x$ 对称.

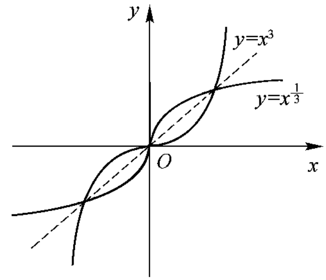


图 1-2-1

例 2 函数 $y = x^3$ 和函数 $y = x^{\frac{1}{3}}$ 的图象如图 1-2-1 所示.

一般地,要求 $y = f(x)$ 的反函数,只需先从 $y = f(x)$ 中解出 x 的表达式,当该表达式也是一个函数时,再将其中的字母 x, y 进行交换即可.

例 3 求函数 $y = 4x + 1$ 的反函数.

解 由 $y = 4x + 1$,解得

$$x = \frac{y-1}{4}$$

然后交换 x 和 y,得

$$y = \frac{x-1}{4}$$

故所求反函数为 $y = \frac{x-1}{4}$.

判断函数的反函数是否存在,可以用以下定理.

定理 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,值域为 W.若 $f(x)$ 在 D 上是单调增加或单调减少的,则在 W 上 $f(x)$ 的**反函数** $f^{-1}(x)$ **存在**,且 $f^{-1}(x)$ 在 W 上也是**单调增加**或**单调减少**的.

值得注意的是,由于对于 y 的某些值,满足 $y = f(x)$ 的 x 有时不止一个,所以并非任何函数在其定义域内都存在反函数.但是,当我们对 x 的取值范围加以限制时,也有可能存在反函数.例如,函数 $y = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内不存在反函数,但在 $(-\infty, 0)$ 及 $[0, +\infty)$ 内却分别存在反函数 $y = -\sqrt{x}, 0 < x < +\infty$ 及 $y = \sqrt{x}, 0 \leqslant x < +\infty$.

对于分段函数求其反函数,只需分别求出与各子定义域相对应的函数表达式的反函数及其自变量的取值范围即可.

例 4　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}, & -2<x<1\\ x^2, & 1\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$，求其反函数 $f^{-1}(x)$.

解　设 $y=f(x)$，则由反函数的定义，得

$$x=\begin{cases}3y, & -2<3y<1\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant\sqrt{y}\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}3y, & -\dfrac{2}{3}<y<\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{y}, & 1\leqslant y\leqslant 4\end{cases}$$

将 x,y 互换，得所求反函数为

$$f^{-1}(x)=y=\begin{cases}3x, & -\dfrac{2}{3}<x<\dfrac{1}{3}\\ \sqrt{x}, & 1\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

二、复合函数

在很多实际问题中，两个变量的联系有时不是直接的. 例如，在函数 $y=\tan 3x$ 中，这个函数值不是直接由自变量 x 来确定的，而是通过 $3x$ 来确定的. 如果用 u 表示 $3x$，那么函数 $y=\tan 3x$ 就可表示成 $y=\tan u, u=3x$. 这说明了 y 与 x 的函数关系是通过变量 u 来确定的.

具有上述关系的函数，可以给出下面的定义：

定义 2　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，就称 y 是 x 的**复合函数**，记作

$$y=f[\varphi(x)]$$

其中 u 称为**中间变量**.

函数的复合中要注意的是，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域应该在函数 $y=f(u)$ 的定义域内，这样函数才能复合，否则复合就没有意义.

例 5　$y=\mathrm{e}^{\cos x}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$ 和 $u=\cos x$ 复合而成，$y=(1+\lg x)^3$ 是由 $y=u^3$ 和 $u=1+\lg x$ 复合而成，但函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=3+x^2$ 不能构成复合函数，因为对于任意的 x，$u=3+x^2$ 的值不在函数 $y=\arcsin u$ 的定义域$[-1,1]$内，从而复合出的函数 $y=\arcsin(3+x^2)$ 是没有意义的.

函数的复合也可以是多个函数的情形. 例如，$y=\lg u, u=v^2, v=x+1$，则复合函数是 $y=\lg(x+1)^2$，其中 u,v 是中间变量.

利用复合函数的概念，可以把一个较复杂的函数分解成若干个简单函数. 下面举例分析复合函数的复合过程，正确熟练地掌握这个方法，将会给以后的学习带来很多方便.

例 6　写出下列复合函数的复合过程.

(1) $y = a^{a^x}$；　　　(2) $y = \cos^2 x^2$；

(3) $y = \ln \sqrt[5]{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}-1}}$；　　　(4) $y = \lg(3 + \sqrt{x^3 - 1})$.

解　(1) $y = a^u, u = a^x$；

(2) $y = u^2, u = \cos w, w = x^2$；

(3) $y = \ln u, u = \sqrt[5]{v}, v = \dfrac{w}{w-1}, w = e^t, t = 2x$；

(4) $y = \lg u, u = 3 + w, w = \sqrt{v}, v = t - 1, t = x^3$.

例 7　设函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x > 1 \\ \dfrac{1}{x}, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases}$，$g(x) = e^x$，求复合函数 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$.

解　因为 $f(x)$，$g(x)$ 符合复合条件，所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} e^x, & x > 0 \\ e^{-x}, & x \leqslant 0 \end{cases};$$

$$g[f(x)] = \begin{cases} e^x, & x > 1 \\ e^{\frac{1}{x}}, & 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

值得注意的是，求分段函数的复合函数时，特别要注意不同范围内的自变量、中间变量及函数之间的依赖关系.

第三节　初等函数

在初等数学中已经学习过下面几类函数：

(1) 幂函数：$y = x^\alpha$（$\alpha \in \mathbf{R}$ 是常数）；

(2) 指数函数：$y = a^x$（$a > 0$，且 $a \neq 1$）；

(3) 对数函数：$y = \log_a x$（$a > 0$，且 $a \neq 1$）；

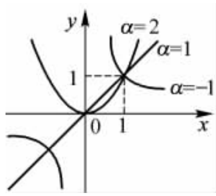
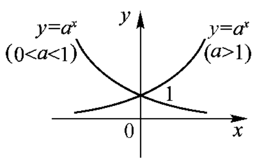
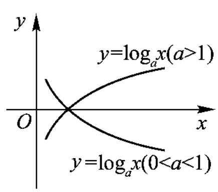
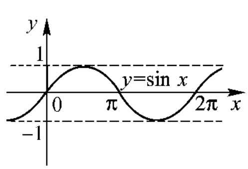
(4) 三角函数：$y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \csc x$ 等；

(5) 反三角函数：$y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$ 等.

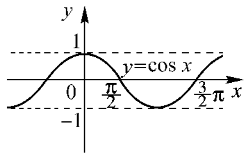
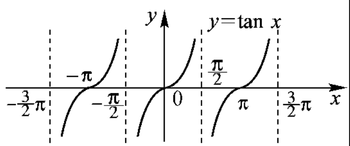
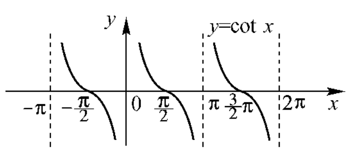
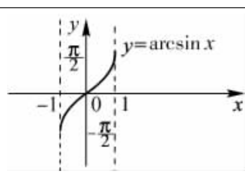
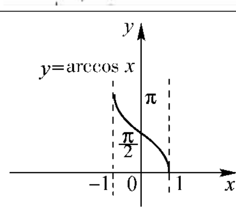
以上五类函数统称为**基本初等函数**.

为了今后学习和查阅方便，现将一些常用的基本初等函数的定义域、值域、图象和特性列于表 1-1 中.

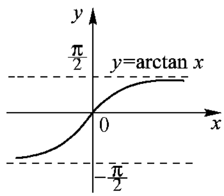
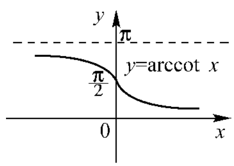
表 1-1

函　　数	图　　象	定义域和值域	主要性质
幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实常数）		定义域：随 α 的不同而不同，但不论 α 取何值，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内总有定义； 值域：随 α 不同而不同	若 $\alpha>0$，x^{α} 在 $[0,+\infty)$ 内单调增加； 若 $\alpha<0$，x^{α} 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少
指数函数 $y=a^{x}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$	$a^{0}=1$； 若 $a>1$，a^{x} 单调增加； 若 $0<a<1$，a^{x} 单调减少； 直线 $y=0$ 为函数图象的水平渐近线
对数函数 $y=\log_{a}x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$		$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$	$\log_{a}1=0$； 若 $a>1$，$\log_{a}x$ 单调增加； 若 $0<a<1$，$\log_{a}x$ 单调减少； 直线 $x=0$ 为函数图象的垂直渐近线
正弦函数 $y=\sin x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$	以 2π 为周期的函数； 在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调增加； 在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3}{2}\pi\right]$ 上单调减少，其中 $k\in\mathbf{Z}$； 奇函数

续表

函　　数	图　　象	定义域和值域	主要性质
余弦函数 $y = \cos x$		$x \in (-\infty, +\infty)$ $y \in [-1, 1]$	以 2π 为周期的函数； 在$[(2k-1)\pi, 2k\pi]$上单调增加，在$[2k\pi, (2k+1)\pi]$上单调减少，其中$k \in \mathbf{Z}$； 偶函数
正切函数 $y = \tan x$		$x \neq (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ $y \in (-\infty, +\infty)$	以 π 为周期的函数； 在$(-\dfrac{\pi}{2}+k\pi, \dfrac{\pi}{2}+k\pi)(k \in \mathbf{Z})$内单调增加； 奇函数； 直线 $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ 为函数图象的垂直渐近线$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$
余切函数 $y = \cot x$		$x \neq n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ $y \in (-\infty, +\infty)$	以 π 为周期的函数； 在$(k\pi, (k+1)\pi)(k \in \mathbf{Z})$内单调减少， 奇函数； 直线 $x = n\pi$ 为函数图象的垂直渐近线$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$
反正弦函数 $y = \arcsin x$		$x \in [-1, 1]$ $y \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$	单调增加； 奇函数
反余弦函数 $y = \arccos x$		$x \in [-1, 1]$ $y \in [0, \pi]$	单调减少； 非奇非偶函数

续表

函　数	图　象	定义域和值域	主要性质
反正切函数 $y=\arctan x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	单调增加； 直线 $y=-\frac{\pi}{2}$ 与 $y=\frac{\pi}{2}$ 为函数图象的水平渐近线； 奇函数
反余切函数 $y=\text{arccot}\, x$		$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$	单调减少； 直线 $y=0$ 及 $y=\pi$ 为函数图象的水平渐近线； 非奇非偶函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算及有限次复合步骤得到的用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

例如，$y=\sin^3(2x+1)$，$y=5\log_2(x^2+4x+7)$，$y=\arcsin a^{\frac{x}{3}}+x\sqrt[3]{3x+2}$ 等都是初等函数. 而分段函数

$$f(x)=\begin{cases}-x+1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -x-1, & x<0\end{cases}$$

是由几个式子表示的函数，因而不是初等函数. 但是，由于分段函数在其子定义域内通常都是初等函数，所以仍可通过初等函数来研究它们.

在工程技术中经常要用到一类初等函数是双曲函数，它们是由指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 生成的初等函数，它们的定义和符号如下：

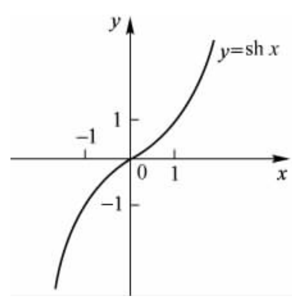


图 1-3-1

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$，其图象如图 1-3-1 所示；双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，其图象如图

1-3-2 所示;双曲正切函数 $\text{th}\,x=\dfrac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$,其图象如图 1-3-3 所示;双曲余切函数 $\text{cth}\,x=\dfrac{\text{ch}\,x}{\text{sh}\,x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$,其图象如图 1-3-4 所示.

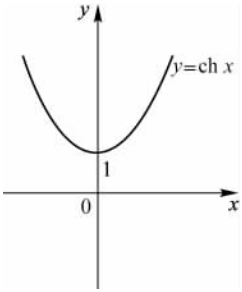


图 1-3-2

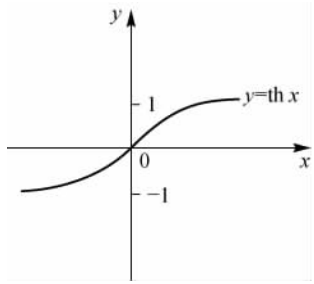


图 1-3-3

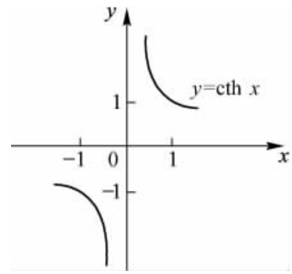


图 1-3-4

其中 $\text{sh}\,x$,$\text{th}\,x$,$\text{cth}\,x$ 都是奇函数,$\text{ch}\,x$ 是偶函数.

$\text{sh}\,x$,$\text{ch}\,x$,$\text{th}\,x$ 的反函数称为反双曲函数,分别记作

反双曲正弦 $\qquad y=\text{arsh}\,x$

反双曲余弦 $\qquad y=\text{arch}\,x$

反双曲正切 $\qquad y=\text{arth}\,x$

同样,反双曲函数可以通过自然对数函数来表示,这里不作介绍.

用数学工具解决实际问题时,往往需要建立相应的数学模型,其中一类较简单的问题是建立函数关系.下面给出两个例子.

例 1 某工厂生产电视机,年产量为 x 台,每台售价 1 200 元.当年产量在 500 台以内,可以全部售出.经广告宣传后又可以再多出售 300 台,每台平均广告费为 40 元,若生产再多,本年就销售不出去了.试建立本年的销售总收入 y 与年产量 x 的关系.

解 因为总收入 = 产量 × 单价,根据题意可列出函数关系如下:

$$y=\begin{cases}1\,200x, & 0\leqslant x\leqslant 500\\ 1\,200\times 500+(1\,200-40)(x-500), & 500<x\leqslant 800\\ 1\,200\times 500+1\,160\times 300, & x>800\end{cases}$$

例 2 某单位要建造一个容积为 V 的长方体水池,它的底为正方形.如果池底的单位面积造价为侧面积造价的 2 倍,试建立总造价与底面边长之间的函数关系.

解 设底面边长为 x,总造价为 y,侧面积单位造价为 m.由已知可知水深为 $\dfrac{V}{x^2}$,

侧面积为 $4x \cdot \frac{V}{x^2} = \frac{4V}{x}$,根据题意可得函数关系如下：

$$y = 2mx^2 + 4m\frac{V}{x}, \quad 0 < x < +\infty$$